Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 45 /WT=2,96/ i 46 /WT=2,43/
z numeru 3/1987

Piotr Bała	- Toruń	43,63pkt
Robert Repucha	- Gołdap	42,31pkt
Anna Gluza	- Toruń	39,89pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	38,47pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	37,09pkt
Piotr Wach	- Katowice	35,27pkt
Leszek Szalast	- Radzyń Pdl	30,98pkt

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1987

Zadania z fizyki nr 53, 54

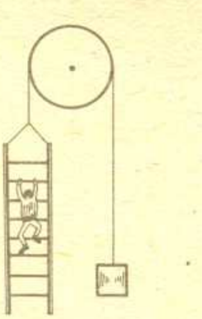
Redaguje dr Andrzej NADOLNY

53. Kierowca samochodu pędzącego po poziomej, suchej płycie lotniska nagle zauważył przeszkodę ustawioną prostopadle do kierunku jazdy. Jaki manewr — hamowanie czy skręt — daje większą szansę uniknięcia zderzenia z przeszkodą? Zakładamy, że nawierzchnia lotniska ma jednakowe własności w całym obszarze manewru, a przeszkoda jest szeroka.

54. Wyobraźmy sobie, że opanowano technikę superdrobnego druku, odczytywanego za pomocą mikroskopu elektronowego. Jakim kryteriom powinien odpowiadać materiał użyty jako „farba drukarska" nanoszona na podłoże przenikliwe dla elektronów, aby zapewnić trwałość zapisu i dobrą jakość obrazu?
Ocenić, jaką najmniejszą wielkość mogłaby mieć reprodukcja całości zbiorów biblioteki liczącej 1 milion książek, średnio po 400 stron. W jaki ewentualnie sposób można by informację zawartą w tych książkach zapisać na jeszcze mniejszej powierzchni?

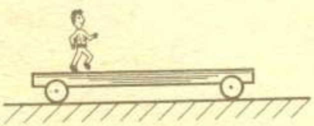
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1987

Przypominamy treść zadań



49. Na jednym końcu liny przerzuconej przez blok stały (rysunek) zamocowana jest drabinka sznurowa o masie m, na której znajduje się człowiek o masie M, na drugim końcu liny wisi przeciwciężar o masie $M+m$. Układ ten początkowo pozostaje w spoczynku. W pewnym momencie człowiek zaczyna się wspinać po drabince i pokonuje na niej odcinek o długości l. Obliczyć drogę, jaką przebył człowiek w układzie odniesienia związanym z Ziemią, przy założeniu, że masy liny i bloku są bardzo małe w stosunku do M i m, a tarcie jest zaniedbywalne.
50. Pragniemy sfotografować pejzaż w świetle Księżyca tak, aby uzyskane zdjęcie było zbliżone jasnością do zdjęcia wykonanego w warunkach dziennych. Ile — orientacyjnie — razy czas ekspozycji podczas pełni Księżyca, przy bezchmurnym niebie, winien być dłuższy od czasu ekspozycji przy bezpośrednim oświetleniu słonecznym?
W przybliżonych rachunkach przyjąć, że średnica kątowa tarczy Księżyca wynosi 0°,5 oraz że powierzchnia Księżyca odbija około 0,1 padającego promieniowania.

49. Zadanie to jest ideowo zbliżone do zadania nr 37, którego rozwiązanie zamieściliśmy w numerze 3/1987.
Zamiast omawianego układu można rozpatrzyć układ równoważny, przedstawiony na rysunku:



człowiek (c) na wózku (w) o masie $M+2m$, poruszającym się bez tarcia na poziomej płaszczyźnie. Stosunek przyspieszeń (a), prędkości (v) oraz odległości (s) przebytych przez człowieka i wózek w układzie związanym z nieruchomym środkiem masy, czyli z Ziemią, jest równy

$$\frac{a_c}{a_w} = \frac{v_c}{v_w} = \frac{s_c}{s_w} = \frac{M+2m}{M},$$

przy czym odpowiednie wektory dla człowieka i wózka mają przeciwne zwroty.
Droga przebyta przez człowieka w układzie wózka wynosi

$$l = s_c + s_w = \left(1+\frac{M}{M+2m}\right)s_c.$$

Stąd wzór na poszukiwaną drogę:

$$s_c = \frac{M+2m}{2(M+m)}\,l.$$

50. Oświetlenie Księżyca przez Słońce jest zbliżone do oświetlenia Ziemi. Niech natężenie tego oświetlenia wynosi I_0, całkowity strumień świetlny padający na powierzchnię Księżyca jest więc $\pi R^2 I_0$, gdzie R — promień Księżyca. Można przyjąć w przybliżeniu, że Księżyc odbija część $a = 0{,}1$ tego promieniowania jednorodnie w półsferę. Natężenie odbitego od Księżyca światła będzie zatem na powierzchni Ziemi wynosiło

$$I = a\pi R^2 I_0/(2\pi r^2) = (a/2)(R/r)^2 I_0 = (a/8)\gamma^2 I_0,$$

gdzie r jest odległością Ziemia—Księżyc, γ — średnicą kątową tarczy Księżyca (w radianach). Po podstawieniu danych otrzymujemy $I/I_0 = 10^{-6}$. Czas naświetlania powinien więc zostać wydłużony 10^6 razy. Należy jednak pamiętać, że przy bardzo słabym oświetleniu wymagane są dłuższe czasy ekspozycji, niżby to wynikało z prostych zależności (dlatego też wskazane jest wykorzystanie pełnego otworu obiektywu).
Faktyczna jasność Księżyca w pełni wynosi około 1/400 000 jasności Słońca. Wyższa od obliczonej przez nas wartość wiąże się z faktem nieizotropowego odbicia światła przez powierzchnię Księżyca — odbicie w kierunkach zbliżonych do kierunku padania światła jest stosunkowo bardziej intensywne.

Zadania z matematyki nr 155, 156

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

155. Wyznaczyć kres górny wartości funkcji $f(x) = 2^{-x}+2^{-1/x}$ na zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich.

156. Czy dla każdej liczby naturalnej k istnieje wielościan wypukły mający dokładnie k przekątnych? (Bierzemy pod uwagę tylko przekątne przecinające wnętrze wielościanu.)

Zadanie **156** przysłał pan Werner Mnich z Opola.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

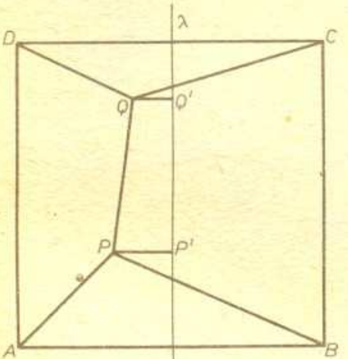
po uwzględnieniu ocen rozwiązań

zadań 145 /WT=3,13/ i 146 /WT=1,15/

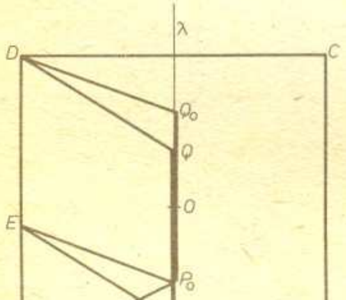
z numeru 2/1987

Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	48,12pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	45,22pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	43,01pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	42,82pkt
Karol Jachacy	- Tłuszcz	41,97pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	41,27pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	39,39pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	39,14pkt

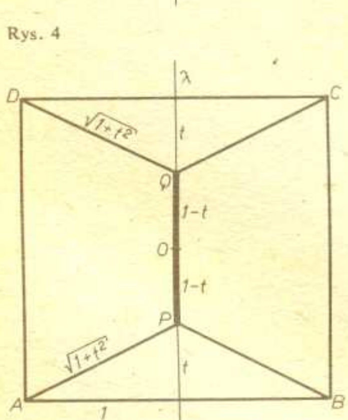
Panowie Jędrzejewicz i Bonk - obaj kończą drugą rundę.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1987

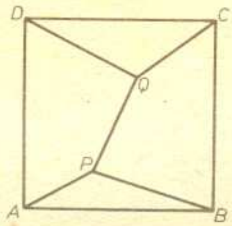
Przypominamy treść zadań:

151. Zaprojektować sieć dróg o minimalnej łącznej długości, łączących cztery miejscowości w wierzchołkach kwadratu.

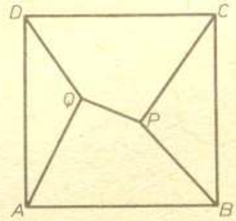
152. Dowieść, że $(\Sigma k^{-1/2})^2+(\Sigma k^{-1/3})^3 > 2(n^2+n-2)$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$; sumowanie po $k = 1, \ldots, n$.

151. Przez sieć dróg rozumiemy w tym zadaniu zbiór S będący sumą skończenie wielu łuków krzywych o dobrze określonych, skończonych długościach. Zakłada się przy tym, że zbiór S jest spójny, tzn. każde jego dwa punkty łączy krzywa zawarta w S, oraz że wierzchołki A, B, C, D rozpatrywanego kwadratu K należą do S. Każdy taki zbiór można przedstawić w postaci sumy łuków nie mających punktów wspólnych innych niż końce. Suma długości tych łuków — to wielkość, którą mamy zminimalizować. Wielkość ta, oczywiście, nie zwiększy się, gdy każdy z tych łuków zastąpimy odcinkiem prostej; możemy więc do takich sieci ograniczyć uwagę. Jeśli pewne fragmenty sieci S leżą poza kwadratem K, to zastępując każdy punkt $P \in S-K$ przez punkt $P' \in K$ leżący najbliżej P otrzymamy sieć S' o łącznej długości mniejszej niż S. Wystarczy więc rozpatrywać sieci S zawarte w K.

Przeciwległe wierzchołki A i C musi łączyć pewna łamana zawarta w S. Dla ustalonej łamanej L, biegnącej od A do C, minimalną długość sieci S zawierającej L uzyskamy dołączając do L odcinki $\overline{BP}$ i $\overline{DQ}$, gdzie $P, Q \in L$ są punktami leżącymi najbliżej wierzchołków B i D (odpowiednio). Długość ta nie zwiększy się, gdy „wyprostujemy" fragmenty łamanej L, na które została ona podzielona punktami P i Q. Tak więc wystarczy ograniczyć uwagę do sieci S złożonych z pięciu odcinków, jak pokazują rysunki 1 i 2; rozróżnienie bierze się stąd, że punkt Q może leżeć na łamanej L między punktami P i C lub między A i P, a ponieważ sytuacje te są w pełni symetryczne, będziemy rozważać tylko sieci pierwszego typu (rysunek 1). Dopuszczamy położenia graniczne, tj. takie, w których punkty P i Q pokrywają się bądź też któryś z nich pokrywa się z którymś z wierzchołków.



Rys. 1



Rys. 2

Niech λ będzie symetralną boków $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. W sytuacji z rysunku 1 długość sieci nie zwiększy się, gdy punkty P i Q zastąpimy ich rzutami P', Q' na prostą λ (rysunek 3): $AP+PB \geqslant AP'+P'B$ (co wynika z własności elips o ogniskach A, B), $CQ+QD \geqslant CQ'+Q'D$ (analogicznie), $PQ \geqslant P'Q'$. Możemy więc zakładać, że $P, Q \in \lambda$. Dalej, można zakładać, że środek odcinka $\overline{PQ}$ pokrywa się ze środkiem O kwadratu $ABCD$. Bowiem jeśli nie, to przesuwamy ten odcinek do położenia $\overline{P_0Q_0}$ symetrycznego względem O (rysunek 4) i oznaczając przez E punkt odcinka $\overline{AD}$ taki, że $DE = PQ = P_0Q_0$, mamy $AP+QD = AP+PE \geqslant AP_0+P_0E = AP_0+Q_0D$ (z własności elips o ogniskach A, E, jako że P_0 leży na symetralnej odcinka $\overline{AE}$).

Ostatecznie zredukowaliśmy zadanie do sytuacji z rysunku 5: $P, Q \in \lambda$, $OP = OQ = 1-t \in [0, 1]$ (przyjmujemy, że bok kwadratu ma długość 2). Ale wówczas $AP = BP = CQ = DQ = \sqrt{1+t^2}$, $PQ = 2-2t$ i długość sieci S równa się $2-2t+4\sqrt{1+t^2}$. Badając pochodną otrzymanej funkcji zmiennej $t \in [0, 1]$ stwierdzamy, że osiąga ona minimum przy $t = \sqrt{1/3}$. Nietrudno zauważyć, że wówczas trzy odcinki wychodzące z punktu P (i podobnie z Q) wyznaczają sektory o równej rozwartości 120°. Jest to poszukiwana konfiguracja.

Uwaga. W końcowym fragmencie można było zastosować do trójkąta AOB twierdzenie mówiące, że w trójkącie T o kątach $\leqslant 120°$ suma odległości punktu $P \in T$ od wierzchołków trójkąta jest najmniejsza wtedy, gdy boki T są widoczne z P pod równymi kątami 120°.

152. Skorzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną oraz z nierówności $2^n n! < n^n$ zachodzącej dla $n \geqslant 6$ i łatwej do udowodnienia przez indukcję. Dla liczb naturalnych $m \geqslant 1$ i $n \geqslant 6$ mamy więc

$$\frac{1}{n}\Sigma k^{-1/m} > (\Pi k^{-1/m})^{1/n} = ((n!)^{1/n})^{-1/m} > \left(\frac{n}{2}\right)^{-1/m},$$

a stąd $(\Sigma k^{-1/m})^m > 2n^{m-1}$. Przyjmując $m = 2$ i $m = 3$ otrzymujemy dla lewej strony danej w zadaniu nierówności oszacowanie z dołu przez sumę $2n+2n^2$, słuszne dla $n \geqslant 6$. Gdy to wyrażenie zmniejszymy jeszcze o 4, dostaniemy nierówność prawdziwą także dla $n = 1, 2, 3, 4, 5$ (o czym można się przekonać bezpośrednim sprawdzeniem). Dowodzona nierówność zachodzi zatem dla wszystkich liczb naturalnych $n \geqslant 1$.