Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

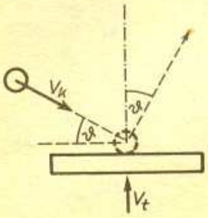
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1987

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F.** Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3\,S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana.**
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Zadania z fizyki nr 51, 52

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



51. Sprężysta kula pada na idealnie gładką tarczę pod kątem ϑ z prędkością v_k, jak na rysunku. Przyjmując doskonale sprężyste odbicie kuli od tarczy, obliczyć prędkość v_t, jaką winna mieć tarcza w chwili zderzenia, aby tor kuli po odbiciu tworzył kąt prosty z kierunkiem padania.

52. Wiadomo, że różnoimienne ładunki na okładkach kondensatora są, co do wartości, równe. Co by się działo, gdyby ładunek jednej z okładek był nieco większy, na przykład o 1%, od ładunku drugiej okładki? Przeanalizować sytuację na przykładzie kondensatora o pojemności 10 μF naładowanego do napięcia 10 V.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 42 /WT=2,16/ i 44 /WT=3,39/
z numeru 2/1987

Aleksander Surma	- Myszków	44,02pkt
Piotr Bała	- Toruń	40,10pkt
Robert Repucha	- Gołdap	38,97pkt
Anna Gluza	- Toruń	36,36pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	35,47pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	33,26pkt
Piotr Wach	- Katowice	31,98pkt

Pan Surma jako czwarty osiągnął 44 punkty.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1987

Przypominamy treść zadań:

47. Wolframowe włókno żaróweczki próżniowej ma przy nominalnym napięciu zasilającym 3,5 V temperaturę 2000 K. Jaka będzie temperatura włókna podczas zasilania żaróweczki napięciem 4,5 V? Przy jakim orientacyjnie napięciu nastąpi stopienie włókna? Można przyjąć, że wolfram w wysokiej temperaturze promieniuje jak ciało doskonale czarne. Opór właściwy wolframu jest w przybliżeniu proporcjonalny do $T^{1,2}$ (T — temperatura). Temperatura topnienia wolframu wynosi 3650 K.

48. Posiadanie pary uszu ułatwia nam określenie kierunku, z którego dochodzi dany dźwięk. Stwierdzono, że dokładność, z jaką można ten kierunek wyznaczyć, zależy od częstotliwości dźwięku, przy czym w przedziale częstotliwości od 2 kHz do 5 kHz jest ona wyraźnie mniejsza, aniżeli dla częstotliwości niższych oraz wyższych. Jakie przyczyny fizyczne mogą być odpowiedzialne za to zjawisko?

47. Przyjmujemy, że moc wydzielana we włóknie

$$M = \frac{U^2}{R} = \frac{\pi r^2 U^2}{l\varrho} \tag{1}$$

(U — napięcie zasilające, R — opór włókna, r — promień przekroju drutu włókna, l — długość włókna, ϱ — opór właściwy wolframu)
jest równa mocy wypromieniowanej

$$M' = 2\pi r l \sigma (T^4 - T_0^4) \tag{2}$$

(σ — stała Stefana-Boltzmanna, T — temperatura włókna, T_0 — temperatura otoczenia).
Ze względu na $T \gg T_0$ stosujemy postać przybliżoną wzoru (2):

$$M' = 2\pi r l \sigma T^4. \tag{3}$$

Z przyrównania wyrażeń (1) i (3) otrzymujemy wzór na temperaturę włókna

$$T = \left(\frac{rU^2}{2\sigma l^2 \varrho}\right)^{1/4} = AU^{1/2}\varrho^{-1/4} \qquad (A \text{ — stała}).$$

Po podstawieniu do niego zależności $\varrho = B\,T^k$ (B — pewna stała, $k = 1{,}2$) uzyskujemy związek między temperaturą a napięciem

$$T = CU^\nu,$$

w którym C — stała, $\nu = \dfrac{2}{4+k}$.
Podstawiając $U = 3{,}5$ V, $T = 2000$ K, wyznaczamy stąd wartość C. W końcu obliczamy temperaturę odpowiadającą napięciu 4,5 V — 2200 K oraz napięcie odpowiadające temperaturze 3650 K — 16,7 V (w rzeczywistości stopienie włókna nastąpiłoby z pewnością już przy niższym napięciu).

48. W odbieraniu wrażeń słuchowych występuje różnica natężeń fal dźwiękowych dochodzących do obu uszu oraz różnica faz między tymi falami. Pierwszy czynnik ma istotne znaczenie dla fal krótszych od rozmiarów głowy ($\nu \gtrsim 5$ kHz), które ulegają stosunkowo słabej dyfrakcji na głowie jako przeszkodzie. Drugi czynnik odgrywa rolę dla fal dłuższych od rozstawu uszu ($\nu \lesssim 2$ kHz). Dla pośredniego przedziału częstotliwości wynika stąd upośledzenie kierunkowości słyszenia.

Rozwiązanie zadania M 478. Przypuśćmy, że pionki można poprzesuwać w podany sposób. Rozpatrzmy dowolne pole p_1, z którego pionek został przesunięty na pole p_2. Z kolei pionek z p_2 został przesunięty na p_3, itd. Po parzystej liczbie kroków wrócimy na pole p_1. Istotnie, ponieważ wróciliśmy do punktu wyjścia, liczba kroków w dół równa jest liczbie kroków w górę; to samo odnosi się do kroków w lewo i w prawo. Łączna liczba kroków jest więc parzysta i równa się liczbie pól w naszym cyklu.
Całą szachownicę można podzielić na takie cykle, zatem liczba pól na szachownicy musiałaby być parzysta — a nie jest.

Rozwiązanie zadania M 479. Zdefiniujemy wielomiany:
$f_1(x) = f(x+1) - f(x)$, $f_2(x) = f_1(x+1) - f_1(x)$, …,
$f_m(x) = f_{m-1}(x+1) - f_{m-1}(x)$. Mamy teraz
$f(a+1) = f(a) + f_1(a)$; $f(a+2) = f(a) + 2f_1(a) + f_2(a)$, …,
a ogólnie dla każdego naturalnego n

$$f(a+n) = f(a) + \binom{n}{1} f_1(a) + \binom{n}{2} f_2(a) + \ldots + \binom{n}{m} f_m(a).$$

Wystarczy zauważyć, że $f_k(a)$ są liczbami całkowitymi, zatem $f(a+n)$ jest całkowite dla dowolnych n naturalnych.
Powyższe rozumowanie stosuje się także do wielomianu $g(x) = f(-x)$. Dlatego $f(a+n)$ jest całkowite dla każdego n całkowitego.

Zadania z matematyki nr 153, 154

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

153. Ciąg $(a(n))$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest określony przez warunki: $a(2k) = a(k)$ dla $k \geqslant 1$, $a(4k+1) = 1$ dla $k \geqslant 0$, $a(4k+3) = 0$ dla $k \geqslant 0$. Czy ciąg ten jest od pewnego miejsca okresowy?

154. Dla jakich liczb naturalnych $n \geqslant 3$ można poprowadzić przez wierzchołki n-kąta foremnego n równoległych prostych (w płaszczyźnie tego wielokąta) tak, by każdy wierzchołek leżał na innej prostej i żeby odległości między sąsiednimi prostymi były takie same?

Zadanie **154** przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1987

Przypominamy treść zadań:

149. Niech b będzie średnią arytmetyczną długości wszystkich boków pewnego wielokąta wypukłego, a d — średnią arytmetyczną długości wszystkich przekątnych tego wielokąta. Dowieść, że $b < d$.

150. Dowieść, że wielomian $f(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$, gdzie $d > 0$, $c^2+a^2d < 4\,bd$, nie ma pierwiastków rzeczywistych.

149. Oznaczmy przez n liczbę boków, a przez m liczbę przekątnych danego wielokąta W. Weźmy pod uwagę dowolny czworokąt Q, którego dwoma przeciwległymi bokami są dwa nieprzyległe boki wielokąta W; oznaczmy sumę ich długości przez $b(Q)$. Przekątne Q są też przekątnymi W; oznaczmy sumę ich długości przez $d(Q)$. Oczywiście $b(Q) < d(Q)$. Zatem $\sum\limits_Q b(Q) < \sum\limits_Q d(Q)$ (*); sumowanie jest rozciągnięte na wszystkie dopuszczalne czworokąty Q.
Każdy bok W występuje w sumie $\sum b(Q)$ jednakową liczbę razy; oznaczmy ją przez k. Podobnie każda przekątna występuje w sumie $\sum d(Q)$ jednakową liczbę razy; oznaczmy ją przez l.
A ponieważ po obu stronach nierówności (*) mamy tyle samo par odcinków, musi zachodzić proporcja $k : l = m : n$. Wobec tego

$$1 < \frac{\sum d(Q)}{\sum b(Q)} = \frac{l \cdot (\text{suma długości wszystkich przekątnych})}{k \cdot (\text{suma długości wszystkich boków})} = \frac{lmd}{knb} = \frac{d}{b}.$$

150. Jeśli $x \neq 0$, to

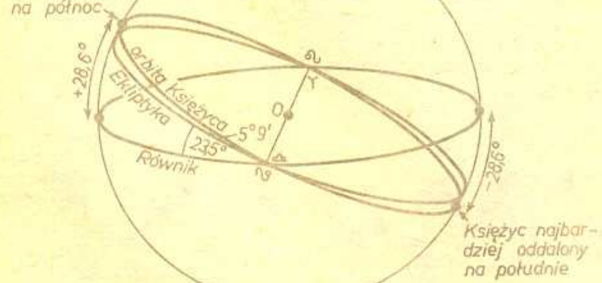
$$f(x) > x^4+ax^3+\frac{c^2+a^2d}{4d}x^2+cx+d = \left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2+\left(\frac{cx}{2\sqrt{d}}+\sqrt{d}\right)^2 \geqslant 0;$$

a $f(0) = d > 0$ z założenia.

Patrz w niebo

Uważni obserwatorzy nieba być może zwrócili uwagę na fakt, że w ciągu ostatnich kilku miesięcy Księżyc czasem wznosi się szczególnie wysoko nad horyzontem, innym znów razem jego wędrówka po niebie odbywa się szczególnie nisko. Różnice te będą wyjątkowo dobrze widoczne we wrześniu, a więc tym, którzy jeszcze nie zauważyli osobliwego zachowania naszego satelity, radzimy nie zwlekać — następnym razem podobne zjawisko będzie można zaobserwować dopiero w 2006 roku.

Wyjaśnienie przyczyny występowania dużych różnic w wysokościach Księżyca podczas jego górnych kulminacji jest proste: Płaszczyzna orbity Księżyca jest nachylona pod kątem 5°9′ do płaszczyzny ekliptyki, ta zaś pod kątem 23°27′ do płaszczyzny równika niebieskiego. Gdy wszystkie trzy płaszczyzny przecinają się wzdłuż jednej prostej (tj. gdy węzły orbity Księżyca pokrywają się z punktami równonocy), orbita Księżyca może osiągać największe lub najmniejsze nachylenie w stosunku do równika, a tym samym do horyzontu. Nachylenie jest największe, gdy punkt równonocy wiosennej pokrywa się z węzłem wstępującym (rysunek), a najmniejsze, gdy pokrywa się on z węzłem zstępującym. W sytuacjach, gdy węzły nie pokrywają się z punktami równonocy, nachylenie przyjmuje wartości pośrednie. Węzły dokonują pełnego obiegu po ekliptyce w ciągu 18,6 lat, w tym więc czasie można zaobserwować wszystkie możliwe tory Księżyca wśród gwiazd.



W 1987 roku węzeł wstępujący znajduje się właśnie w pobliżu równika niebieskiego — w gwiazdozbiorze Ryb. Wobec tego Księżyc jest najbardziej oddalony od ekliptyki wędrując na tle gwiazdozbioru Bliźniąt. Ten obszar ekliptyki jest z kolei najbardziej oddalony na północ od równika. Zsumowanie tych dwóch efektów prowadzi do sytuacji, w której maksymalna północna deklinacja Księżyca może osiągnąć aż 28°36′. Podobnie — największą deklinację południową osiąga Księżyc w gwiazdozbiorze Strzelca.

8 listopada węzeł wstępujący znajdzie się dokładnie w punkcie równonocy wiosennej. Jednak już 15 września Księżyc będzie górował na największej wysokości nad horyzontem — równej 67°. W dwa tygodnie później — 30 września, gdy przesunie się do przeciwnego punktu swej orbity, będzie górował na najmniejszej wysokości — zaledwie 9° nad horyzontem. (Wysokości górowania zależą, oczywiście, od szerokości geograficznej miejsca obserwacji — tu podane są dla Warszawy.) W latach, w których nachylenie orbity Księżyca jest przeciwne do nachylenia ekliptyki, różnice między maksymalnymi wysokościami górowania dochodzą zaledwie 37°, a tu mamy aż o 20° więcej!

Aby przekonać się, jak duże są zmiany wysokości górowania Księżyca wynikające z ruchu węzłów, najlepiej przeprowadzić obserwacje w odstępie kilku lat. 17 września Księżyc będący w ostatniej kwadrze przybliży się najbardziej do Polluksa (β *Gem*), jasnej gwiazdy z konstelacji Bliźniąt. Za kilka lat minie β *Gem* w znacznie większej odległości.

mgr Joanna UDALSKA