Stephen Smale — znakomity matematyk amerykański, ur. 1930 r. Swoje najwybitniejsze rezultaty osiągnął w dziedzinie topologii algebraicznej i teorii gładkich układów dynamicznych. Rozstrzygnął hipotezę Poincarégo dla $n \geq 5$. Laureat Medalu Fieldsa w 1966 r.

C: Możemy to przedstawić na Międzynarodowym Kongresie Matematyków. Moglibyśmy dostać Medal Fieldsa.
S: Dwa Medale Fieldsa.

Medal Fieldsa — najwyższe wyróżnienie w matematyce; odpowiednik nagrody Nobla. Przyznawany raz na cztery lata, przy okazji Międzynarodowego Kongresu Matematyków, dwóm, trzem lub czterem osobom.

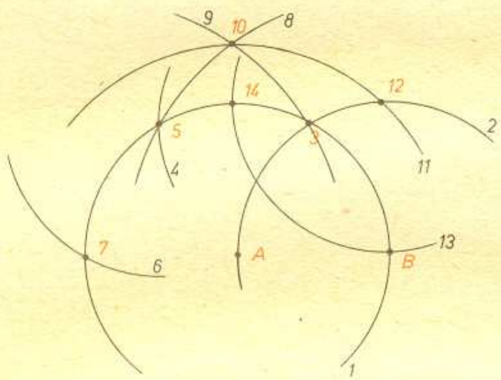
C: Zostanę błyskawicznie profesorem. Wiesz, że mianują ich tysiącami? Nieograniczona masowa produkcja profesorów.
S: Nie, naprawdę?
C: I nie musiałbym mieć trzydziestu jeden publikacji i dwóch ...
S: Mógłbym mieć turnee z wykładami po USA! Np. jak Charles Dickens lub — jak się nazywał ten facet z Ameryki?
C: Twain?
S: Ach, nie; ja wynająłbym samochód.
C: I mógłbym pojechać do Paryża — obiad na Sorbonie, kolacja w Instytucie — mógłbym nawet spotkać się z Bourbakim! Tak! Tak!
(*Nagle przerywa zaskoczony.*) Czekaj. Co z 2?
S: 2?
C: 2.
S: Co z tym? No, mów! Szybko!
C: $2 = 0+2$.
S: Wspaniale.
C: 2 jest liczbą pierwszą. 0 i 2 są parzyste.
S: A niech to licho!
C: Może udałoby się to jakoś naprawić?
S: Ale gdzie założyliśmy, że one są różne od zera? Nie widzę tego. To dziwne.
C: To faktycznie dziwne.

Przekład Krzysztof CIESIELSKI i Zdzisław POGODA

Rozwiązanie zadania M 475. Przypuśćmy, że punkt Q został także wybrany losowo. Punkty A, B i Q dzielą okrąg na trzy łuki i ze względu na symetrię średnia długość każdego z nich wynosi $\frac{1}{3}$. Przez obrót można punkt Q doprowadzić do z góry wybranego położenia. Widać teraz, że średnia długość łuku, wyznaczonego przez punkty A, B i zawierającego Q, wynosi $\frac{2}{3}$.

Uwaga. Wynik może wydać się sprzeczny z intuicją. Zauważmy jednak, że dłuższy łuk ma większe szanse przykrycia punktu Q niż krótszy.

Rysujemy okręgi



Ten dziwny rysunek jest rozwiązaniem zadania:

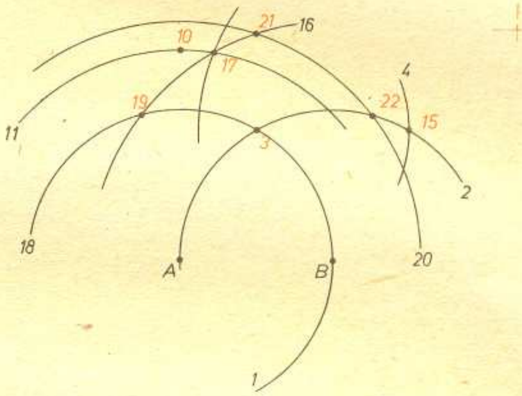
Skonstruować samym cyrklem wierzchołki C i D kwadratu $ABCD$ mając dane punkty A i B.

Robi się to tak: znajdujemy kolejno

okrąg 1 o środku A przechodzący przez B,
okrąg 2 o środku B i tym samym promieniu,
punkt 2 w przecięciu 1 i 2,
okrąg 4 o środku 3 i tym samym promieniu,
punkt 5 w przecięciu 1 i 4,
okrąg 6 o środku 5 i tym samym promieniu,
punkt 7 w przecięciu 1 i 6,
okrąg 8 o środku B przechodzący przez 5,
okrąg 9 o środku 7 przechodzący przez 3,
punkt 10 w przecięciu 8 i 9,
okrąg 11 o środku A przechodzący przez 10,
punkt 12 w przecięciu 2 i 11,
okrąg 13 o środku 12 przechodzący przez B,
punkt 14 w przecięciu 1 i 13

Mamy $C = 12$ i $D = 14$. Dlaczego? Myślę, że Czytelnik sam potrafi to sprawdzić.

Możemy rysować dalej (na rysunku opuszczono 5-9, 12-14):



punkt 15 w przecięciu 2 i 4,
okrąg 16 o środku 15 i promieniu $A10$,
punkt 17 w przecięciu 11 i 16,
okrąg 18 o środku B przechodzący przez 17,
punkt 19 w przecięciu 1 i 18,
okrąg 20 o środku A i promieniu $B17$,
punkt 21 w przecięciu 18 i 20,
punkt 22 w przecięciu 2 i 20.

Czytelnik zechce sprawdzić, że pięciokąt $ABCDE$, gdzie $C = 22$, $D = 21$ i $E = 19$, jest foremny.

Nasuwa się szereg pytań. Dla skonstruowania kwadratu o danym boku używaliśmy ośmiu okręgów, a dla skonstruowania pięciokąta foremnego o danym boku — dziesięciu (bo nie był potrzebny okrąg 13). Czy liczby te można zmniejszyć? Ja nie wiem.

Skonstruowaliśmy czworokąt foremny (czyli kwadrat), pięciokąt foremny; każdy wie, jak skonstruować sześciokąt foremny. Czy może da się samym cyrklem skonstruować dowolny n-kąt foremny? Nie. Dla $n \leqslant 20$ np. nie da się skonstruować 7-, 9-, 11-, 13-, 14-, 18- ani 19-tokąta. Bo da się skonstruować te i tylko te wielokąty foremne, które można skonstruować cyrklem i linijką.

Pod koniec XVIII wieku Duńczyk Mohr (czyt. mor) i Włoch Mascheroni (czyt. maskeroni) wykazali, że

samym cyrklem można skonstruować wszystkie te punkty, które można skonstruować cyrklem i linijką.

Czasami nie jest to łatwe. Dlatego sądzę, że konstruowanie samym cyrklem różnych punktów, które wiadomo jak skonstruować cyrklem i linijką, może dostarczyć ciekawej rozrywki.

M. K.