Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1987

Przypominamy treść zadań:

147. (x_n) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych; $z_n = \mathrm{NWW}(x_1, \ldots, x_n)$. Czy szereg $\sum 1/z_n$ musi być zbieżny?
148. P jest punktem wewnętrznym wielościanu wypukłego W; z każdego wierzchołka wielościanu W wychodzą 3 krawędzie. W szkielet każdego ostrosłupa, którego podstawą jest dowolna ściana wielościanu W, a pozostałym wierzchołkiem — punkt P, można wpisać kulę. Dowieść, że w szkielet wielościanu W można wpisać kulę.

147. Tak. Jeśli a, b są liczbami naturalnymi, $a < b$, to

$$\frac{1}{\mathrm{NWW}(a, b)} = \frac{\mathrm{NWD}(a, b)}{ab} = \frac{\mathrm{NWD}(a, b-a)}{ab} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

Zatem dla $n \geqslant 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{\mathrm{NWW}(x_1, \ldots, x_n)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{NWW}(x_{n-1}, x_n)} \leqslant \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n},$$

z której dostajemy

$$\frac{1}{z_1} + \ldots + \frac{1}{z_n} \leqslant \frac{1}{x_1} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) < \frac{2}{x_1}.$$

148. Ponumerujmy ściany $F_1, \ldots, F_n$ wielościanu W w taki sposób, by ściany F_1 i F_2 były przyległe do siebie (miały wspólną krawędź), oraz by każda kolejna ściana F_k, $3 \leqslant k \leqslant n$, przylegała do dwóch ścian o numerach wcześniejszych. Oznaczmy przez W_j ostrosłup o wierzchołku P i podstawie F_j, przez K_j koło wpisane w ścianę F_j (jego istnienie wynika z założeń), a przez L_j — prostą prostopadłą do płaszczyzny ściany F_j, przechodzącą przez środek koła K_j. Niech $\overline{AB}$ będzie wspólną krawędzią ścian F_1 i F_2. Kule wpisane w ostrosłupy W_1 i W_2 są styczne do krawędzi $\overline{AB}$ w tym samym punkcie (bo przekrój każdej z tych kul płaszczyzną ABP jest kołem wpisanym w trójkąt ABP). Płaszczyzny wyznaczone przez ten punkt styczności oraz proste L_1 i L_2 są obie prostopadłe do krawędzi $\overline{AB}$, a więc są identyczne. Wobec tego proste L_1 i L_2 przecinają się. Ściana F_3 przylega do F_1 i F_2. Zatem także proste L_1 i L_3 przecinają się i podobnie proste L_2 i L_3 przecinają się. Ponieważ proste L_1, L_2, L_3 nie leżą w jednej płaszczyźnie, muszą mieć dokładnie jeden punkt wspólny O. Dalej przez indukcję wnosimy, że każda z prostych $L_4, \ldots, L_n$ przechodzi przez punkt O. Punkt ten jest więc równo oddalony od wszystkich krawędzi wielościanu W. Stąd i z wypukłości W wynika teza zadania.

Patrz w niebo

mgr Joanna UDALSKA

Patrząc na nocne niebo widzimy obiekty znajdujące się w różnych odległościach od nas. Plan pierwszy stanowią konstelacje złożone z bliskich (w skali astronomicznej), widocznych oddzielnie gwiazd. Obraz nieba uzupełnia Droga Mleczna, stanowiąca tło, utworzone z gwiazd tak odległych, że możemy obserwować je zaledwie w postaci świetlistej smugi. Nie oznacza to, oczywiście, że w odległościach pośrednich nie ma gwiazd. Miliardy spośród nich są niedostępne nieuzbrojonemu oku, jako zbyt odległe, by można dostrzec je w postaci oddzielnych punktów i zarazem zbyt nieliczne, aby mogły utworzyć pozornie ciągłą chmurę świetlną.

Bezksiężycowe letnie noce są w naszych szerokościach geograficznych najlepszą porą do przeprowadzania obserwacji Drogi Mlecznej. Widać wtedy jej fragmenty przebiegające przez gwiazdozbiory Łabędzia, Orła i Strzelca. Również zimą warunki obserwacji Drogi Mlecznej są korzystne, przy czym widać wtedy najlepiej fragmenty leżące w konstelacjach Kasjopei, Perseusza, Woźnicy i Jednorożca. Choć w Strzelcu jasny pas ginie dla naszych oczu za horyzontem, to jednak w rzeczywistości nie kończy się. Przecina dalej niebo południowe i w Jednorożcu znowu ukazuje się na półkuli północnej.

Już amatorskie obserwacje Drogi Mlecznej, bez użycia jakichkolwiek przyrządów, mogą dostarczyć ciekawych wrażeń. Wystarczy przez około pół godziny przyzwyczaić wzrok do ciemności, by dostrzec wiele zastanawiających szczegółów. Przede wszystkim zauważmy, że jasna, świetlista smuga nie jest jednakowo szeroka w każdym obszarze. Jej granice są trudne do uchwycenia, jednak wyraźnie widać, że nisko nad południowym horyzontem — w okolicach gwiazdozbioru Strzelca (mamy tu na myśli obserwacje przeprowadzane latem) — Droga Mleczna jest znacznie szersza niż w Kasjopei czy Perseuszu. Ponadto nie jest ona jednakowo jasna na całej swej powierzchni — łatwo wyróżnić jaśniejsze i ciemniejsze plamy. Szczególnie efektownie ciemny obszar rozdziela dwa pasma Drogi Mlecznej w obszarze gwiazdozbioru Łabędzia. Oba pasma znacznie ustępują jasnością rozległemu obszarowi w Strzelcu, a pierwszoplanowe gwiazdy na ich tle widoczne są bardzo wyraźnie, znacznie wyraźniej niż w Strzelcu.

Jak wyjaśnić te fakty obserwacyjne?

W tym miejscu musimy odwołać się do dzisiejszej wiedzy na temat budowy naszej Galaktyki, bowiem Droga Mleczna to nic innego, jak widok Galaktyki z jej wnętrza. Wrażenie świetlistej smugi wywołane jest przez słaby blask miliardów odległych gwiazd, co postulował już Demokryt (V w. p.n.e.), a co zostało wykazane przez Galileusza, gdy w 1609 roku skierował swą pierwszą lunetę w ten obszar nieba. Ponad 200 lat temu angielski astronom William Herschel przedstawił model naszej Galaktyki w postaci ogromnego zbiorowiska gwiazd ułożonego w kształt dysku, co przy przyjętym przez niego założeniu, że Słońce wraz z układem planetarnym znajduje się w środku tego dysku, dobrze odpowiadało obrazowi Drogi Mlecznej opasującej wokoło niebo obydwu półkul. Model Herschela poprawiony został w latach dwudziestych naszego wieku, gdy oceniono, że Słońce znajduje się w odległości 30 000 lat świetlnych od centrum Galaktyki. Badania przeprowadzone w latach pięćdziesiątych wykazały, że Galaktyka należy do grupy tzw. galaktyk spiralnych — na gęsty obszar centralny, zwany jądrem, nawijają się ramiona spiralne. Układ Słoneczny znajduje się na brzegu jednego z nich, zwanego ramieniem Oriona.

Patrząc w kierunku konstelacji Oriona widzimy więc przede wszystkim to ramię, w którym sami się znajdujemy. Szczególnie jasne obszary gwiazdozbiorów Strzelca, Skorpiona i Tarczy tworzą ramię Strzelca, bliższe centrum Galaktyki. Prawdopodobnie w kierunku tym leży jeszcze jedno ramię. Mimo że okolice te świecą dla nas jasno, w rzeczywistości znajduje się tam wiele ciemnych mgławic pochłaniających promieniowanie. Przesłaniają nam one centrum Galaktyki, które nie zakryte byłoby tysiące razy jaśniejsze. Po przeciwnej stronie w obszarze konstelacji Perseusza leży ramię Perseusza — jedno z zewnętrznych ramion naszej Galaktyki. Wszystkie ramiona spiralne znajdują się w płaszczyźnie dysku galaktycznego. W kierunkach prostopadłym do dysku i pośrednich widzimy tylko gwiazdy z naszego otoczenia na ciemnym tle międzygalaktycznym.

Rozwiązanie zadania F 225. Początkowo środek masy wahadła będzie się obniżał. Na skutek tego wzrastać będzie odległość od środka masy do punktu zawieszenia wahadła. Ponieważ w przybliżeniu układ taki możemy uważać za wahadło matematyczne, dla którego $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (L — długość wahadła), okres wahań będzie się w miarę ubywania piasku wydłużał. Jednakże obniżanie się środka masy pojemnika z piaskiem nie zachodzi jednostajnie. W przypadku, gdy w pojemniku jest mało piasku, środek masy może przesuwać się wyżej, co powoduje skracanie okresu drgań. (Kiedy cały piasek wysypie się ze zbiornika, wtedy środek masy wahadła będzie znajdował się wyżej niż w przypadku, kiedy poziom piasku znajduje się poniżej środka masy samego pojemnika.) Sytuacja niejednostajnej zmiany okresu drgań nie wystąpi w przypadku, gdy środek masy pustego pojemnika będzie znajdował się na jego dnie.

Schematyczny wygląd dysku galaktycznego widzianego z góry. Nie ma danych dotyczących obszaru zawartego między liniami przerywanymi.