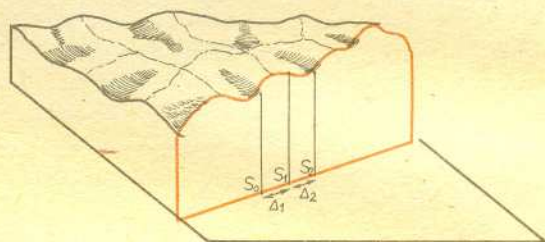




są organy, przez które przechodzi, więc porównanie  $x_1$  z  $x_0$  daje nam ich sumaryczną gęstość. To, co nas natomiast interesuje, to rozkład gęstości wewnątrz ciała. Naturalnym pomysłem jest robienie zdjęć z różnych stron i porównywanie ich ze sobą. Na tej zasadzie właśnie działa tomograf. Praktycznie daje on obrazy przekrojów ciała pacjenta. W wybranej płaszczyźnie przekroju wysyłamy w różnych kierunkach liniowe wiązki promieni Roentgena o ustalonym natężeniu początkowym  $x_0$  i mierzymy natężenie końcowe  $x_1$ . A teraz zacznijmy tłumaczyć to na język matematyki.



*Podziękowanie. Chciałbym podziękować mgr Beacie Toczyłowskiej i dr Renacie Szamowskiej z Zakładu Radiologii Akademii Medycznej w Warszawie za wiele cennych informacji i przygotowanie zdjęć.*

Na płaszczyźnie dana jest nieujemna funkcja  $f$ , reprezentująca gęstość rentgenowską. Wzdłuż prostej  $L$  biegnie promień rentgenowski, który jest pochłaniany proporcjonalnie do gęstości  $f$  i do długości przebytej drogi. Jeżeli gęstość jest stała i równa  $c$ , to promień o natężeniu początkowym  $x_0$  po przebyciu drogi  $\Delta$  będzie miał natężenie  $x_0 \exp(-c\Delta)$  (exp oznacza funkcję wykładniczą o podstawie  $e$ ). Jeśli gęstość  $f$  nie jest stała, to bierzemy punkty  $s_0, s_1, \dots, s_n$  jak na rysunku, i przyjmujemy  $\Delta_i = d(s_i, s_{i-1})$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ . Jeżeli  $\Delta_1$  jest małe, to funkcja  $f$  jest w przybliżeniu stała na odcinku  $[s_0, s_1]$ , a więc natężenie promieniowania w punkcie  $s_1$  równe jest w przybliżeniu  $x_0 \exp(-f(s_1) \cdot \Delta_1)$ . Analogicznie w punkcie  $s_2$  jest ono równe w przybliżeniu  $x_0 \exp(-f(s_1)\Delta_1) \cdot \exp(-f(s_2)\Delta_2) = x_0 \cdot \exp[-(f(s_1)\Delta_1 + f(s_2)\Delta_2)]$ . Stąd widać, że natężenie wyjściowe  $x_1$  będzie równe w przybliżeniu  $x_0 \exp\left(-\sum_{i=1}^n f(s_i)\Delta_i\right)$ , a więc, że po przejściu granicznym (np. dla ciągłej funkcji  $f$ ) mamy

$$x_1 = x_0 \exp\left(-\int_L f(s) ds\right), \quad \text{czyli} \quad \log(x_0/x_1) = \int_L f(s) ds.$$

Mamy następujący problem matematyczny:

Dla funkcji  $f$ , określonej na płaszczyźnie, znamy  $\int_L f(s) ds = F_L$  dla każdej prostej  $L$ . Znaleźć funkcję  $f$ .

*Trochę historii. Problem matematyczny omówiony tutaj został postawiony i całkowicie rozwiązany przez Johanna Radona w pracy opublikowanej w roku 1917. Podobne problemy pojawiały się w fizyce, matematyce i astronomii zarówno nieco wcześniej od pracy Radona, jak i dużo później i były wielokrotnie i niezależnie rozwiązywane różnymi metodami. Wydaje się, że pierwszym zastosowaniem transformaty Radona do obróbki danych doświadczalnych była praca radzieckiego astronoma W. A. Ambarcumiana, który w roku 1936 badał rozkład prędkości ruchu gwiazd względem Ziemi. Tomografię komputerową jako metodę diagnostyki medycznej opracowali w latach sześćdziesiątych Allan M. Cormack i Godfrey N. Hounsfield. Do praktyki klinicznej została ona wprowadzona w roku 1973. W roku 1979 jej twórcy otrzymali nagrodę Nobla w dziedzinie medycyny.*

Każdy z nas miał zapewne robione zdjęcie rentgenowskie. Jest to obecnie niezastąpiona metoda diagnostyki medycznej. Nie jest to jednak metoda doskonała. Na przykład: na podstawie zwykłego zdjęcia klatki piersiowej nie można stwierdzić, czy łopátka jest z przodu, czy z tyłu. Oczywiście i bez zdjęcia każdy wie, gdzie ona jest, ale bywają bardziej złożone sytuacje, kiedy odpowiedź nie jest tak oczywista. Wtedy prostym i szeroko w medycynie stosowanym wyjściem jest zrobienie zdjęcia z boku. Ale wyobraźmy sobie, że chcemy zobaczyć coś (np. guz) w mózgu. Na zdjęciu wyraźnie widać kości, ale zupełnie nie wiadomo, czy ledwo, ledwo widoczna różnica w jasności zdjęcia to przypadkowy efekt niedoskonałości aparatury lub kliszy, minimalna różnica w grubości czaszki czy też istotna zmiana w tkance samego mózgu.

Czytelnik dziwi się zapewne, skąd nagle w *Delcie* o medycynie. Otóż odpowiedź jest prosta. Od kilkunastu lat można za pomocą promieni Roentgena otrzymywać bardzo dokładne obrazy wnętrza organizmu. Umożliwiają to tomograf komputerowy. Celem tego artykułu jest wyjaśnienie matematycznych zasad działania tego urządzenia. Zastanówmy się, co dzieje się w czasie zdjęcia rentgenowskiego. Wiązka promieni Roentgena o znanym natężeniu początkowym  $x_0$  przechodzi przez ciało pacjenta, gdzie jest pochłaniana, a natężenie końcowe  $x_1$  jest rejestrowane na kliszy. Ponieważ promieniowanie rentgenowskie pochłaniane jest tym silniej, im gęstsze (w sensie rentgenowskim)

(1) Nasuwa się pytanie: po pierwsze, czy to się w ogóle daje zrobić, po drugie — jeśli się daje, to jak?

W dalszym ciągu tego artykułu pokażemy, że odpowiedź na pytanie pierwsze jest pozytywna oraz naszkicujemy jedną z odpowiedzi na pytanie drugie.

W dalszych naszych rozważaniach przyjmujemy, że funkcja  $f$  bardzo szybko maleje w nieskończoności, tak, że wszystkie potrzebne nam całki będą zbieżne. W szczególności  $F_L$  będą dobrze określone i skończone dla wszystkich prostych  $L$ .

Opiszemy teraz transformatę Radona. Prostą  $L$  na płaszczyźnie możemy określić dwiema liczbami  $p \in \mathbb{R}$  oraz  $\varphi \in (0, 2\pi]$ . Wtedy  $L_{p,\varphi} = \{(x, y) : x \cos \varphi + y \sin \varphi = p\}$ . Tę samą prostą przedstawiamy w postaci parametrycznej jako  $\{(x, y) = A + t v\}$ , gdzie  $A$  jest punktem na płaszczyźnie, a  $v$  jest wektorem o długości 1. Dla funkcji  $f$ , określonej na płaszczyźnie, definiujemy jej transformatę Radona  $Rf$  jako funkcję określoną wzorem

$$Rf(p, \varphi) = \int_{L_{p,\varphi}} f(x, y) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(A + tv) dt.$$

Aby odpowiedzieć na pytanie (1), pokażemy, że  $R$  jest różnowartościowe, tzn. jeżeli  $f$  i  $g$  są różnymi funkcjami, to  $Rf \neq Rg$ , oraz podamy pewne wskazówki, jak znajdować  $f$  znając  $Rf$ .

Zdefiniujemy wielomiany Hermite'a  $H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2}$

dla  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Łatwo zobaczyć, że  $\frac{d^k}{dt^k} e^{-t^2}$  jest wielomianem

stopnia  $k$  pomnożonym przez  $e^{-t^2}$ , a stąd  $H_k(t)$  to wielomian stopnia  $k$ . Mamy również następującą relację, zwaną relacją ortogonalności

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} H_s(t) H_k(t) e^{-t^2} dt = 0 \quad \text{dla } s \neq k, \quad s, k = 0, 1, 2, \dots$$

Za pomocą wielomianów Hermite'a określamy funkcje dwóch zmiennych  $\psi_{k,l}(x, y) = H_k(x) H_l(y) e^{-x^2 - y^2}$ . Jest faktem, który podamy bez dowodu, że każda interesująca nas funkcja  $f$  daje się zapisać jako

$$(3) \quad f(x, y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} \psi_{k,l}(x, y).$$

Mając ten fakt łatwo uwierzyć, że

$$Rf(p, \varphi) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} R\psi_{k,l}(p, \varphi).$$

Widać więc, że aby dokładnie zbadać transformatę Radona, należy obliczyć  $R\psi_{k,l}$ . Niech  $\partial_x f$  (odpowiednio  $\partial_y f$ ) oznacza pochodną cząstkową względem  $x$  (lub  $y$ ) funkcji  $f(x, y)$ . Mamy

$$\begin{aligned} R(\partial_x f)(p, \varphi) &= R\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}\right)_{(p,\varphi)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1/h \left[ \int_{L_{p,\varphi}} f(x+h, y) - \int_{L_{p,\varphi}} f(x, y) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1/h \left[ \int_{L_{p+h \cos \varphi, \varphi}} f(x, y) - \int_{L_{p,\varphi}} f(x, y) \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 1/h [Rf(p+h \cos \varphi, \varphi) - Rf(p, \varphi)] = \\ &= \cos \varphi \partial_p (Rf)(p, \varphi). \end{aligned}$$

Analogicznie otrzymujemy  $R(\partial_y f)(p, \varphi) = \sin \varphi \partial_p (Rf)(p, \varphi)$ . Korzystając z definicji wielomianów Hermite'a możemy napisać  $\psi_{k,l}(x, y) = (-1)^{k+l} \partial_x^k \partial_y^l e^{-x^2 - y^2}$ , a więc powyższe wzory dają

$$(4) \quad R(\psi_{k,l})(p, \varphi) = (-1)^{k+l} \cos^k \varphi \sin^l \varphi \partial_p^{k+l} [R(e^{-x^2 - y^2})](p, \varphi).$$

Aby obliczyć  $R(e^{-x^2 - y^2})$ , zauważmy, że obrót dookoła zera nie zmienia wartości funkcji  $e^{-x^2 - y^2}$ , zatem  $R(e^{-x^2 - y^2})(p, \varphi)$  zależy tylko od odległości prostej  $L_{p,\varphi}$  od zera, a więc od  $p$ . Mamy więc

$$R(e^{-x^2 - y^2})(p, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2 - y^2} dy = e^{-p^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

O tej ostatniej całce wiadomo, że równa się ona  $\sqrt{\pi}$ , więc ostatecznie  $R(e^{-x^2 - y^2})(p, \varphi) = \sqrt{\pi} e^{-p^2}$ . Podstawiając to do równania (4), otrzymamy

$$(5) \quad R(\psi_{k,l})(p, \varphi) = (-1)^{k+l} \sqrt{\pi} \cos^k \varphi \sin^l \varphi \partial_p^{k+l} (e^{-p^2}) = \sqrt{\pi} \cos^k \varphi \sin^l \varphi e^{-p^2} H_{k+l}(p).$$

Jesteśmy teraz gotowi dać odpowiedź na pierwsze z pytań (1).

**Twierdzenie.** Transformata Radona  $R$  jest różnowartościowa.

**Dowód.** Przypuśćmy, że dla dwóch funkcji  $f_1, f_2$  i dla każdej pary  $p, \varphi$  mamy  $Rf_1(p, \varphi) = Rf_2(p, \varphi)$ . Stąd łatwo wynika, że  $R(f_1 - f_2)(p, \varphi) = 0$ . Oznaczając  $f = f_1 - f_2$  oraz pisząc  $f$  w postaci (3) i stosując (5) otrzymamy

$$(6) \quad \sqrt{\pi} \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{k,l} \cos^k \varphi \sin^l \varphi e^{-p^2} H_{k+l}(p) = 0.$$

Naszym celem jest wykazanie, że  $f = 0$ , a do tego wystarczy pokazać, że z (6) wynika, iż wszystkie  $a_{k,l} = 0$ . Równość (6) przepiszemy jako

$$\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{s=0}^n a_{s, n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi \right] H_n(p) e^{-p^2} = 0$$

Mnożąc tę równość przez  $H_m(p)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , i całkując otrzymamy

$$0 = \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{s=0}^n a_{s, n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi \right] \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(p) H_m(p) e^{-p^2} dp.$$

Z warunków ortogonalności (2) wynika, że suma ta redukuje się do  $m$ -tego składnika, a więc

$$\sum_{s=0}^m a_{s, m-s} \cos^s \varphi \sin^{m-s} \varphi = 0 \quad \text{dla } m = 0, 1, 2, \dots$$

oraz  $\varphi \in (0, 2\pi]$ .

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy  $a_{k,l} = 0$  dla  $k, l = 0, 1, 2, \dots$ . Otrzymaliśmy więc różnowartościowość  $R$ .

Zastanówmy się teraz, jak obliczyć  $f$  znając  $Rf$ . Tak naprawdę to będziemy obliczali współczynniki  $a_{k,l}$  w (3).

Jak już wiemy,

$$Rf(p, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\pi} \left[ \sum_{s=0}^n a_{s, n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi \right] H_n(p) e^{-p^2}.$$

Używając relacji ortogonalności, analogicznie jak poprzednio, otrzymamy

$$\sum_{s=0}^n a_{s, n-s} \cos^s \varphi \sin^{n-s} \varphi = B_n \int_{-\infty}^{+\infty} Rf(p, \varphi) H_n(p) dp,$$

gdzie  $B_n = \left[ \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^2(p) e^{-p^2} dp \right]^{-1}$ .

Pisząc  $\sum_{s=0}^m a_{s, m-s} \cos^s \varphi \sin^{m-s} \varphi = \sin^m \varphi \sum_{s=0}^m a_{s, m-s} \operatorname{ctg}^s \varphi$

widzimy, że  $\frac{B_n}{\sin^n \varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} Rf(p, \varphi) H_n(p) dp$  jest wielomianem stopnia co najwyżej  $n$  zmiennej  $\operatorname{ctg} \varphi$ . Znając ten wielomian

możemy obliczyć jego współczynniki  $a_{s, n-s}$ , a czyniąc to dla każdego  $n = 0, 1, 2, \dots$  otrzymamy wszystkie współczynniki  $a_{k, l}$ ,  $k, l = 0, 1, 2, \dots$ . To zaś daje możliwość odtworzenia funkcji  $f(x, y)$ .

Jest to jednak tylko schemat teoretyczny. W praktycznym badaniu tomograficznym nie możemy poznać  $Rf(p, \varphi)$  dla wszystkich wartości  $p \in \mathbb{R}$  i  $\varphi \in (0, 2\pi]$ , a tylko dla pewnego skończonego zbioru prostych  $(p, \varphi)$ . Ponadto otrzymane wartości  $Rf(p, \varphi)$  zawsze obarczone są pewnym błędem. Należy więc znaleźć efektywne metody przybliżonych obliczeń oraz sposoby sprawnej ich realizacji na komputerze. Wymaga to dalszych, trudnych badań matematycznych oraz opracowania bardzo skomplikowanych programów komputerowych. Przedstawienie tych zagadnień wyraźnie jednak wykracza poza ramy tego artykułu i wiedzę autora.

Ostateczny wynik, czyli nowoczesny tomograf komputerowy, który miałem przyjemność oglądać w Zakładzie Radiologii Akademii Medycznej w Warszawie, jest urządzeniem naprawdę imponującym. W celu zrobienia jednego takiego zdjęcia, jak na okładce, czy na początku artykułu (a badanie jednego pacjenta to kilkanaście do kilkudziesięciu takich zdjęć), tomograf wykonuje pół miliona oddzielnych pomiarów, czyli

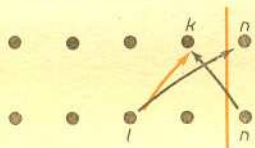
mierzy  $\int_L f(x, y) ds$  dla ponad pół miliona prostych  $L$ . W kilka sekund daje on na monitorze obraz całego przekroju lub powiększenie wybranej jego części. Tomograf pamięta wszystkie przekroje dla danego pacjenta i w razie potrzeby potrafi je przetworzyć na przekrój inną płaszczyzną. Używając dużo mniejszej liczby prostych może dać bardzo szybką serię zdjęć (oczywiście, mniej dokładnych), co pozwala zobaczyć ruch pewnych organów albo przepływ wprowadzonego do organizmu kontrastu. Ma jeszcze wiele innych możliwości. Oczywiście dla medycyny to wszystko to dopiero początek, trzeba dużej wiedzy i doświadczenia, aby wiedzieć, jaką chorobę na takich obrazkach widać.

Transformata Radona ma, oczywiście, naturalne uogólnienia. Wiele z nich jest użytecznych zarówno w matematyce, jak i w zastosowaniach. Można np. rozważać funkcje trzech zmiennych i całki po wszystkich płaszczyznach w przestrzeni. Zasadnicze wyniki matematyczne są tu podobne (choć nieco bardziej skomplikowane) do przedstawionych powyżej. Ta matematyczna teoria jest podstawą jeszcze nowszej techniki diagnostyki medycznej, opartej na zjawisku magnetycznego rezonansu jądrowego (nazywanego często angielskim skrótem NMR).



**Rozwiązanie zadania M 476.** Wszystkie funkcje  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ , spełniające warunki zadania, możemy podzielić na dwie klasy.

Do pierwszej zaliczymy te, dla których  $f(n) = k \neq l = f^{-1}(n)$ .



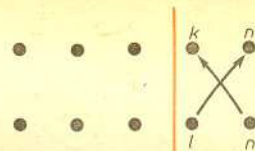
Ustalmy teraz  $l$ .

Funkcji  $f$  możemy wtedy przyporządkować funkcję  $g: \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$  określoną tak:

$g(i) = f(i)$  dla  $i \neq l$ ,  $g(l) = k$ . W ten sposób otrzymamy wszystkie funkcje określone na  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  i spełniające warunki zadania.

Ponadto powyższe przyporządkowanie, przy ustalonym  $l$ , jest różnowartościowe. Jednak  $l$  może przyjmować  $n-1$  wartości, zatem pierwsza klasa liczy  $(n-1) \cdot P_{n-1}$  funkcji.

Do drugiej klasy zaliczymy funkcje, dla których  $f(n) = f^{-1}(n) = l$ .



Ustalając  $l$ , przyporządkowujemy funkcji  $f$  funkcję  $g$ , będącą jej obcięciem do zbioru  $\{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{l\}$ . Podobnie jak poprzednio, widzimy, że druga klasa liczy  $(n-1) \cdot P_{n-2}$  funkcji. Ostatecznie  $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$  (przyjmujemy  $P_0 = 1$ ).

## Czytelnicy piszą

Pan Ryszard Bublewicz z Jeleniej Góry zauważył, że:

wycinając z kuli walec obrotowy o osi przechodzącej przez środek kuli otrzymamy „pierścien kulistyczny” o objętości  $\frac{1}{6} \pi d^3$ , gdzie  $d$  to długość zawartego wewnątrz kuli odcinka tworzącej walca.

A zatem

objętość „pierścienia kulistego” zależy tylko od jego wysokości — w szczególności nie zależy od promienia kuli, z której został wycięty.

A oto dowód. Przyjmując oznaczenia z rysunku i sięgając (do głowy lub tablic) po stosowne wzory mamy:

$$\text{objętość kuli to } \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$\text{objętość walca to } \pi q^2 d = 2\pi(r^2 - h^2)h,$$

$$\text{objętość czaszy to } \frac{1}{2} \pi q^2 p + \frac{1}{6} \pi p^3 = \frac{1}{3} \pi(r-h)^2(2r+h).$$

Ponieważ wycinamy walec i dwie czasze, więc objętość części wyciętej wyniesie

$$2\pi(r^2 - h^2)h + \frac{2}{3} \pi(r-h)^2(2r+h) = \frac{4}{3} \pi(r^3 - h^3)$$

i rzeczywiście objętość pierścienia będzie

$$\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi(r^3 - h^3) = \frac{4}{3} \pi h^3 = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

