

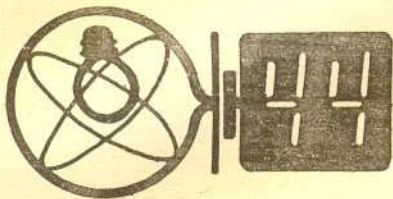
Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 143 /WT=2,86/ i 144 /WT=2,60/
z numeru 1/1987

Michał Marczak	- Radom	44,99pkt
Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	43,84pkt
Andrzej Bonk	- Chełmża	40,94pkt
Karol Jachacy	- Tłuszcz	40,82pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	40,61pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	40,12pkt
Paweł Kamiński	- Warszawa	38,54pkt

Pan Marczak wazedł do Klubu 44 z numerem czterdziestym szóstym.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 P"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 41 /WT=2,12/ i 42 /WT=2,84/
z numeru 1/1987

Aleksander Surma	- Myszków	42,48pkt
Robert Repucha	- Gołdap	37,24pkt
Piotr Bała	- Toruń	35,97pkt
Anna Gluza	- Toruń	35,71pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	33,53pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	31,32pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	29,46pkt
Piotr Wach	- Katowice	29,18pkt

46. Załóżmy, że woreczek o masie m zostaje wyrzucony z prędkością v_0 pod kątem α względem poziomu. Pierwszy etap ruchu to rzut ukośny, a jego zasięg wynosi $z_1 = \frac{2v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$ (g — przyspieszenie ziemskie). Zderzenie woreczka z lodem można uznać za niesprężyste. Pionowa składowa pędu padającego ciała o masie m zostaje w procesie zderzenia zrównoważona przez popęd siły reakcji podłoża $N(t)$ pomniejszonej o ciężar ciała. Stąd mamy

$$(1) \quad mv_0 \sin \alpha = \int_0^{\Delta t} N(t) dt - mg \Delta t,$$

gdzie Δt jest czasem zderzenia (czyli czasem, kiedy $N > mg$). Z drugiej strony zmiana składowej poziomej pędu padającego ciała jest równa popędowi siły tarcia:

$$(2) \quad mv_0 \cos \alpha - mv = \int_0^{\Delta t} fN(t) dt.$$

We wzorze tym f oznacza współczynnik tarcia kinetycznego, v — prędkość (poziomą) ciała bezpośrednio po zderzeniu. Założyliśmy tu, że poziome przesunięcie ciała w czasie zderzenia Δt jest zaniedbywalne. Podobnie zaniedbując człon $mg \Delta t$ po prawej stronie równania (1) (co odpowiada sytuacji, w której czas Δt jest zaniedbywalny wobec czasu ruchu ciała) wyznaczamy na podstawie wzorów (1) i (2) prędkość poślizgu ciała tuż po

Skrót regulaminu

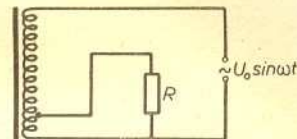
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana.

szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1987

Przypominamy treść zadań:

45. Rysunek przedstawia obwód autotransformatora o bardzo dużej liczbie zwojów n , w którym opornik o oporze R jest podłączony do jednego zwoju. Obliczyć natężenie prądu płynącego przez opornik przy założeniu, że prąd ten praktycznie nie wpływa na strumień pola magnetycznego w rdzeniu autotransformatora, a opór R jest znacznie większy od oporu jednego zwoju. Jakie jest przesunięcie fazowe prądu płynącego przez opornik w stosunku do prądu płynącego przez autotransformator? Jaka powinna być indukcyjność autotransformatora, aby przyjęte założenie mogło być spełnione?



46. Pod jakim kątem względem poziomu powinien być rzucony woreczek z piaskiem, aby po upadnięciu na lód współczynnik tarcia woreczka o lód wynosił 0,1) dotarł jak najdalej?

45. Napięcie na jednym zwoju autotransformatora jest równe $U' = \frac{1}{n} U_0 \sin \omega t$,

wobec tego natężenie prądu płynącego przez opornik wynosi $I_R = \frac{U'}{R} = \frac{U_0 \sin \omega t}{nR}$.

Jak widać, jest ono zgodne w fazie z napięciem zasilającym. Natężenie I_A prądu płynącego w uzwojeniu nieobciążonego autotransformatora jest opóźnione w fazie o $\pi/2$ względem napięcia zasilającego. Wobec tego prąd płynący przez opornik wyprzedza w fazie prąd płynący w autotransformatorze o $\pi/2$.

Podane w treści zadania założenie dotyczące wpływu prądu płynącego przez opornik na strumień pola magnetycznego w rdzeniu oznacza spełnienie warunku $I_{R0} \ll n I_{A0}$ (I_{R0} i I_{A0} oznaczają amplitudy odpowiednich prądów), który wobec związku $I_{A0} = \frac{U_0}{L\omega}$ przyjmuje postać

$$L \ll \frac{n^2 R}{\omega}.$$

upadku:

$$(3) \quad v = v_0 (\cos \alpha - f \sin \alpha).$$

Oczywiście musi zachodzić $f < \operatorname{ctg} \alpha$, w przeciwnym razie ciało w wyniku zderzenia zatrzyma się. Zasięg z_2 poślizgu na lodzie wyznaczamy przyrównując energię kinetyczną $\frac{mv^2}{2}$ do pracy sił tarcia $fmgz_2$:

$$z_2 = \frac{v^2}{2fg} = \frac{v_0^2}{2fg} (\cos \alpha - f \sin \alpha)^2.$$

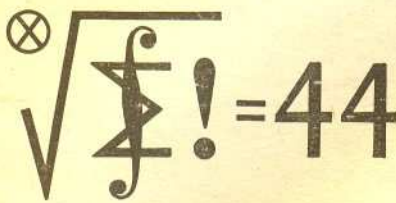
Zasięg całkowity będzie równy

$$z = z_1 + z_2 = \frac{v_0^2}{2fg} (\cos \alpha + f \sin \alpha)^2.$$

Obliczając pochodną $\frac{dz}{d\alpha}$ i przyrównując ją do zera otrzymujemy wyrażenie na kąt α odpowiadający maksymalnemu zasięgowi:

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f.$$

Dla $f = 0,1$ kąt ten wynosi $\alpha \approx 6^\circ$, natomiast zasięg $z \approx 5 \frac{v_0^2}{g}$, czyli jest pięciokrotnie większy od maksymalnego zasięgu rzutu ukośnego z taką samą prędkością.



Przypominamy treść zadań:

147. (x_n) jest ściśle rosnącym ciągiem liczb naturalnych; $z_n = \text{NWW}(x_1, \dots, x_n)$. Czy szereg $\sum 1/z_n$ musi być zbieżny?

148. P jest punktem wewnętrznym wielościanu wypukłego W ; z każdego wierzchołka wielościanu W wychodzą 3 krawędzie. W szkielecie każdego ostrosłupa, którego podstawą jest dowolna ściana wielościanu W , a pozostałym wierzchołkiem — punkt P , można wpisać kulę. Dowieść, że w szkielecie wielościanu W można wpisać kulę.

147. Tak. Jeśli a, b są liczbami naturalnymi, $a < b$, to

$$\frac{1}{\text{NWW}(a, b)} = \frac{\text{NWD}(a, b)}{ab} = \frac{\text{NWD}(a, b-a)}{ab} \leq \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

Zatem dla $n \geq 2$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{z_n} = \frac{1}{\text{NWW}(x_1, \dots, x_n)} \leq \frac{1}{\text{NWW}(x_{n-1}, x_n)} \leq \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}$$

z której dostajemy

$$\frac{1}{z_1} + \dots + \frac{1}{z_n} \leq \frac{1}{x_1} + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{x_n}\right) < \frac{2}{x_1}$$

148. Ponumerujemy ściany F_1, \dots, F_n wielościanu W w taki sposób, by ściany F_1 i F_2 były przyległe do siebie (miały wspólną

krawędź), oraz by każda kolejna ściana $F_k, 3 \leq k \leq n$, przylegała do dwóch ścian o numerach wcześniejszych. Oznaczmy przez W_j ostrosłup o wierzchołku P i podstawie F_j , przez K_j koło wpisane w ścianę F_j (jego istnienie wynika z założeń), a przez L_j — prostą prostopadłą do płaszczyzny ściany F_j , przechodzącą przez środek koła K_j . Niech AB będzie wspólną krawędzią ścian F_1 i F_2 . Kule wpisane w ostrosłupy W_1 i W_2 są styczne do krawędzi AB w tym samym punkcie (bo przekrój każdej z tych kul płaszczyzną ABP jest kołem wpisanym w trójkąt ABP). Płaszczyzny wyznaczone przez ten punkt styczności oraz proste L_1 i L_2 są obie prostopadłe do krawędzi AB , a więc są identyczne. Wobec tego proste L_1 i L_2 przecinają się. Ściana F_3 przylega do F_1 i F_2 . Zatem także proste L_1 i L_3 przecinają się i podobnie proste L_2 i L_3 przecinają się. Ponieważ proste L_1, L_2, L_3 nie leżą w jednej płaszczyźnie, muszą mieć dokładnie jeden punkt wspólny O . Dalej przez indukcję możemy powiedzieć, że każda z prostych L_4, \dots, L_n przechodzi przez punkt O . Punkt ten jest więc równo oddalony od wszystkich krawędzi wielościanu W . Stąd i z wypukłości W wynika teza zadania.

Patrz w niebo

mgr Joanna UDALSKA



Rozwiązanie zadania F 225. Początkowo środek masy wahadła będzie się obniżał. Na skutek tego wzrastać będzie odległość od środka masy do punktu zawieszenia wahadła. Ponieważ w przybliżeniu układ taki możemy uważać za wahadło matematyczne, dla którego $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ (L — długość wahadła), okres wahań będzie się w miarę ubywania piasku wydłużał. Jednakże obniżanie się środka masy pojemnika z piaskiem nie zachodzi jednostajnie. W przypadku, gdy w pojemniku jest mało piasku, środek masy może przesuwać się wyżej, co powoduje skracanie okresu drgań. (Kiedy cały piasek wysypie się ze zbiornika, wtedy środek masy wahadła będzie znajdował się wyżej niż w przypadku, kiedy poziom piasku znajduje się poniżej środka masy samego pojemnika.) Sytuacja niejednostajnej zmiany okresu drgań nie wystąpi w przypadku, gdy środek masy pustego pojemnika będzie znajdował się na jego dnie.

Patrząc na nocne niebo widzimy obiekty znajdujące się w różnych odległościach od nas. Plan pierwszy stanowią konstelacje złożone z bliskich (w skali astronomicznej), widocznych oddzielnie gwiazd. Obraz nieba uzupełnia Droga Mleczna, stanowiąca tło, utworzone z gwiazd tak odległych, że możemy obserwować je zaledwie w postaci świetlistej smugi. Nie oznacza to, oczywiście, że w odległościach pośrednich nie ma gwiazd. Miliardy spośród nich są niedostępne niezbrojonomu oku, jako zbyt odległe, by można dostrzec je w postaci oddzielnych punktów i zarazem zbyt liczne, aby mogły utworzyć pozornie ciągłą chmurę świetlną. Bezskazykowe letnie noce są w naszych szerokościach geograficznych najlepszą porą do przeprowadzania obserwacji Drogi Mlecznej. Widać wtedy jej fragmenty przebiegające przez gwiazdozbiory Łabędzia, Orła i Strzelca. Również zimą warunki obserwacji Drogi Mlecznej są korzystne, przy czym widać wtedy najlepiej fragmenty leżące w konstelacjach Kasjopei, Perseusza, Woznicy i Jednorożca. Choć w Strzelcu jasny pas ginie dla naszych oczu za horyzontem, to jednak w rzeczywistości nie kończy się. Przecina dalej niebo południowe i w Jednorożcu znowu ukazuje się na półkuli północnej. Już amatorskie obserwacje Drogi Mlecznej, bez użycia jakichkolwiek przyrządów, mogą dostarczyć ciekawych wrażeń. Wystarczy przez około pół godziny przyzwyczaić wzrok do ciemności, by dostrzec wiele zastanawiających szczegółów. Przede wszystkim zauważmy, że jasna, świetlista smuga nie jest jednakowo szeroka w każdym obszarze. Jej granice są trudne do uchwycenia, jednak wyraźnie widać, że nisko nad południowym horyzontem — w okolicach gwiazdozbioru Strzelca (mamy tu na myśli obserwacje przeprowadzane latem) — Droga Mleczna jest znacznie szersza niż w Kasjopei czy Perseuszu. Ponadto nie jest ona jednakowo jasna na całej swej powierzchni — łatwo wyróżnić jaśniejsze i ciemniejsze plamy. Szczególnie efektywnie ciemny obszar rozdziela dwa pasma Drogi Mlecznej w obszarze gwiazdozbioru Łabędzia. Oba pasma znacznie ustępują jasnością rozległemu obszarowi w Strzelcu, a pierwszoplanowe gwiazdy na ich tle widoczne są bardzo wyraźnie, znacznie wyraźniej niż w Strzelcu. Jak wyjaśnić te fakty obserwacyjne?

W tym miejscu musimy odwołać się do dzisiejszej wiedzy na temat budowy naszej Galaktyki, bowiem Droga Mleczna to nic innego, jak widok Galaktyki z jej wnętrza. Wrażenie świetlistej smugi wywołane jest przez słaby blask miliardów odległych gwiazd, co postulował już Demokryt (V w. p.n.e.), a co zostało wykazane przez Galileusza, gdy w 1609 roku skierował swą pierwszą lunetę w ten obszar nieba. Ponad 200 lat temu angielski astronom William Herschel przedstawił model naszej Galaktyki w postaci ogromnego zbiorowiska gwiazd ułożonego w kształt dysku, co przy przyjętym przez niego założeniu, że Słońce wraz z układem planetarnym znajduje się w środku tego dysku, dobrze odpowiadało obrazowi Drogi Mlecznej opasującej wokół nieba obydwu półkul. Model Herschela poprawiony został w latach dwudziestych naszego wieku, gdy oceniono, że Słońce znajduje się w odległości 30 000 lat świetlnych od centrum Galaktyki. Badania przeprowadzone w latach pięćdziesiątych wykazały, że Galaktyka należy do grupy tzw. galaktyk spiralnych — na gęsty obszar centralny, zwany jądrem, nawijają się ramiona spiralne. Układ Słoneczny znajduje się na brzegu jednego z nich, zwanego ramieniem Oriona.

Patrząc w kierunku konstelacji Oriona widzimy więc przede wszystkim to ramię, w którym sami się znajdujemy. Szczególnie jasne obszary gwiazdozbiorów Strzelca, Skorpiona i Tarczy tworzą ramię Strzelca, bliższe centrum Galaktyki. Prawdopodobnie w kierunku tym leży jeszcze jedno ramię. Mimo że okolice te świecą dla nas jasno, w rzeczywistości znajduje się tam wiele ciemnych mgławic pochłaniających promieniowanie. Przesłaniają nam one centrum Galaktyki, które nie zakryte byłoby tysiące razy jaśniejsze. Po przeciwnej stronie w obszarze konstelacji Perseusza leży ramię Perseusza — jedno z zewnętrznych ramion naszej Galaktyki. Wszystkie ramiona spiralne znajdują się w płaszczyźnie dysku galaktycznego. W kierunkach prostopadłym do dysku i ośrodku widzimy tylko gwiazdy z naszego otoczenia na ciemnym tle międzygalaktycznym.



Schematyczny wygląd dysku galaktycznego widzianego z góry. Nie ma danych dotyczących obszaru zawartego między liniami przerywanymi.