

możemy obliczyć jego współczynniki $a_{s, n-s}$, a czyniąc to dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$ otrzymamy wszystkie współczynniki $a_{k, l}$, $k, l = 0, 1, 2, \dots$. To zaś daje możliwość odtworzenia funkcji $f(x, y)$.

Jest to jednak tylko schemat teoretyczny. W praktycznym badaniu tomograficznym nie możemy poznać $Rf(p, \varphi)$ dla wszystkich wartości $p \in \mathbb{R}$ i $\varphi \in (0, 2\pi]$, a tylko dla pewnego skończonego zbioru prostych (p, φ) . Ponadto otrzymane wartości $Rf(p, \varphi)$ zawsze obarczone są pewnym błędem. Należy więc znaleźć efektywne metody przybliżonych obliczeń oraz sposoby sprawnej ich realizacji na komputerze. Wymaga to dalszych, trudnych badań matematycznych oraz opracowania bardzo skomplikowanych programów komputerowych. Przedstawienie tych zagadnień wyraźnie jednak wykracza poza ramy tego artykułu i wiedzę autora.

Ostateczny wynik, czyli nowoczesny tomograf komputerowy, który miałem przyjemność oglądać w Zakładzie Radiologii Akademii Medycznej w Warszawie, jest urządzeniem naprawdę imponującym. W celu zrobienia jednego takiego zdjęcia, jak na okładce, czy na początku artykułu (a badanie jednego pacjenta to kilkanaście do kilkudziesięciu takich zdjęć), tomograf wykonuje pół miliona oddzielnych pomiarów, czyli

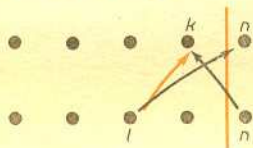
mierzy $\int_L f(x, y) ds$ dla ponad pół miliona prostych L . W kilka sekund daje on na monitorze obraz całego przekroju lub powiększenie wybranej jego części. Tomograf pamięta wszystkie przekroje dla danego pacjenta i w razie potrzeby potrafi je przetworzyć na przekrój inną płaszczyzną. Używając dużo mniejszej liczby prostych może dać bardzo szybką serię zdjęć (oczywiście, mniej dokładnych), co pozwala zobaczyć ruch pewnych organów albo przepływ wprowadzonego do organizmu kontrastu. Ma jeszcze wiele innych możliwości. Oczywiście dla medycyny to wszystko to dopiero początek, trzeba dużej wiedzy i doświadczenia, aby wiedzieć, jaką chorobę na takich obrazkach widać.

Transformata Radona ma, oczywiście, naturalne uogólnienia. Wiele z nich jest użytecznych zarówno w matematyce, jak i w zastosowaniach. Można np. rozważać funkcje trzech zmiennych i całki po wszystkich płaszczyznach w przestrzeni. Zasadnicze wyniki matematyczne są tu podobne (choć nieco bardziej skomplikowane) do przedstawionych powyżej. Ta matematyczna teoria jest podstawą jeszcze nowszej techniki diagnostyki medycznej, opartej na zjawisku magnetycznego rezonansu jądrowego (nazywanego często angielskim skrótem NMR).



Rozwiązanie zadania M 476. Wszystkie funkcje $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, spełniające warunki zadania, możemy podzielić na dwie klasy.

Do pierwszej zaliczymy te, dla których $f(n) = k \neq l = f^{-1}(n)$.



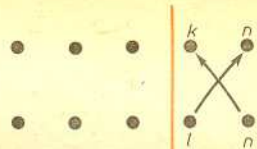
Ustalmy teraz l .

Funkcji f możemy wtedy przyporządkować funkcję $g: \{1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n-1\}$ określoną tak:

$g(i) = f(i)$ dla $i \neq l$, $g(l) = k$. W ten sposób otrzymamy wszystkie funkcje określone na $\{1, 2, \dots, n-1\}$ i spełniające warunki zadania.

Ponadto powyższe przyporządkowanie, przy ustalonym l , jest różnowartościowe. Jednak l może przyjmować $n-1$ wartości, zatem pierwsza klasa liczy $(n-1) \cdot P_{n-1}$ funkcji.

Do drugiej klasy zaliczymy funkcje, dla których $f(n) = f^{-1}(n) = l$.



Ustalając l , przyporządkowujemy funkcji f funkcję g , będącą jej obcięciem do zbioru $\{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{l\}$. Podobnie jak poprzednio, widzimy, że druga klasa liczy $(n-1) \cdot P_{n-2}$ funkcji. Ostatecznie $P_n = (n-1)(P_{n-1} + P_{n-2})$ (przyjmujemy $P_0 = 1$).

Czytelnicy piszą

Pan Ryszard Bublewicz z Jeleniej Góry zauważył, że:

wycinając z kuli walec obrotowy o osi przechodzącej przez środek kuli otrzymamy „pierścien kulistyczny” o objętości $\frac{1}{6} \pi d^3$, gdzie d to długość zawartego wewnątrz kuli odcinka tworzącej walca.

A zatem

objętość „pierścienia kulistego” zależy tylko od jego wysokości — w szczególności nie zależy od promienia kuli, z której został wycięty.

A oto dowód. Przyjmując oznaczenia z rysunku i sięgając (do głowy lub tablic) po stosowne wzory mamy:

$$\text{objętość kuli to } \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$$\text{objętość walca to } \pi q^2 d = 2\pi(r^2 - h^2)h,$$

$$\text{objętość czaszy to } \frac{1}{2} \pi q^2 p + \frac{1}{6} \pi p^3 = \frac{1}{3} \pi(r-h)^2(2r+h).$$

Ponieważ wycinamy walec i dwie czasze, więc objętość części wyciętej wyniesie

$$2\pi(r^2 - h^2)h + \frac{2}{3} \pi(r-h)^2(2r+h) = \frac{4}{3} \pi(r^3 - h^3)$$

i rzeczywiście objętość pierścienia będzie

$$\frac{4}{3} \pi r^3 - \frac{4}{3} \pi(r^3 - h^3) = \frac{4}{3} \pi h^3 = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

