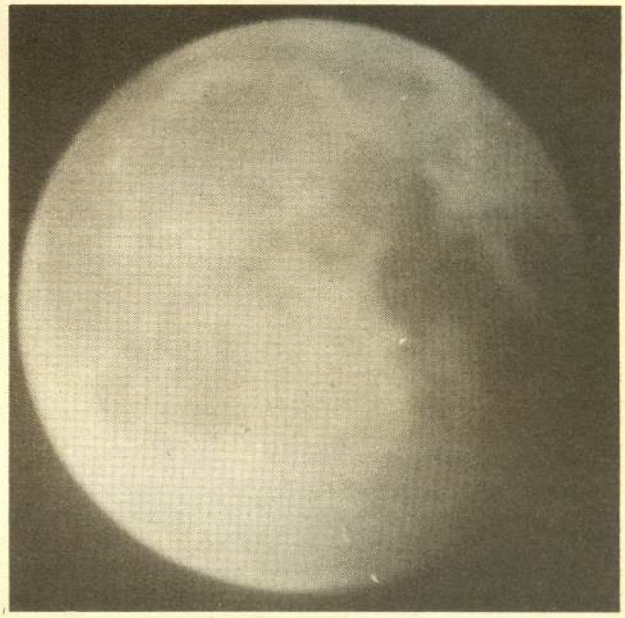
Ostatnie dwa zdjęcia wykonane zostały w sprzężeniu z lunetą myśliwską o obiektywie 64 mm i ogniskowej 400 mm. Pierwsze przedstawia fazę wynurzania się ze stożka cienia, drugie wykonano pod koniec zaćmienia.

$h - 21^{h}\ 20^{m}$



$h - 22^{h}\ 10^{m}$

Szczególny przypadek

Stopień komplikacji twierdzenia Herona podającego sposób obliczenia pola trójkąta za pomocą jedynie długości a, b, c jego boków, a mianowicie

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

gdzie p to połowa obwodu, nie sugeruje, że jest to szczególny przypadek jakiegoś ogólniejszego wzoru. A jest.

Trójkąt można bowiem potraktować jako szczególny przypadek czworokąta wpisywalnego w okrąg — rzeczywiście, każdy trójkąt w okrąg da się wpisać.

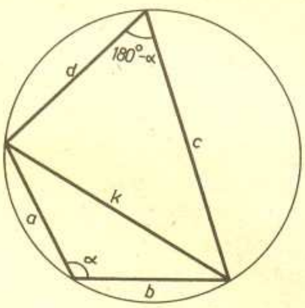
Czworokąt, który można wpisać w okrąg, ma przeciwległe kąty dające w sumie 180° (bo odpowiadające im kąty środkowe łącznie tworzą kąt pełny). Pozwala to na stwierdzenie, że

(1) $$2(ab+cd)\cos\alpha = a^2+b^2-c^2-d^2.$$

Istotnie, z twierdzenia kosinusów mamy (patrz rysunek)

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = k^2 = c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\alpha),$$

a to właśnie daje nam wzór (1).



Mamy też podobnie (przynajmniej z lewej strony) wyglądający wzór

(2) $$2(ab+cd)\sin\alpha = 4S.$$

Faktycznie, skoro już podzieliliśmy czworokąt na dwa trójkąty, to skorzystajmy z tego przy obliczaniu pola:

$$S = \frac{1}{2}\,ab\sin\alpha + \frac{1}{2}\,cd\sin(180^\circ-\alpha),$$

czyli dokładnie (2).

Mając sinus i kosinus tego samego kąta pomnożone przez to samo możemy się łatwo obu tych funkcji pozbyć. Wystarczy w tym celu podnieść (1) i (2) do kwadratu i dodać. Otrzymamy

$$4(ab+cd)^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = (a^2+b^2-c^2-d^2)^2+16S^2.$$

A teraz pozostały nam tylko rachunki wyuczone u samego zarania nauki algebry (np. $p^2-q^2 = (p+q)(p-q)$) i ważna zasada, że wymnażać wyrażenia algebraiczne należy tylko w ostateczności.

$$\begin{aligned}
16S^2 &= 4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = \\
&= (2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2) = \\
&= ((a^2+2ab+b^2)-(c^2-2cd+d^2))((c^2+2cd+d^2)- \\
&\quad -(a^2-2ab+b^2)) = \\
&= ((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2) = \\
&= (a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b) = \\
&= 2(p-d)2(p-c)2(p-b)2(p-a) = \\
&= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).
\end{aligned}$$

I tak otrzymaliśmy wzór Brahmagupty na pole czworokąta wpisywalnego w okrąg:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

W szczególnym i na dodatek krańcowym przypadku (gdy jeden z boków ma długość 0) otrzymujemy stąd wzór Herona.

Co ciekawsze — powyższy dowód przenosi się bez zmian (poza $d = 0$) na przypadek trójkąta — wzory (1) i (2) dla $d = 0$ są przecież dobrze znane (a nawet z takiej ich postaci korzystaliśmy wyżej).

Opracował *M. K.*