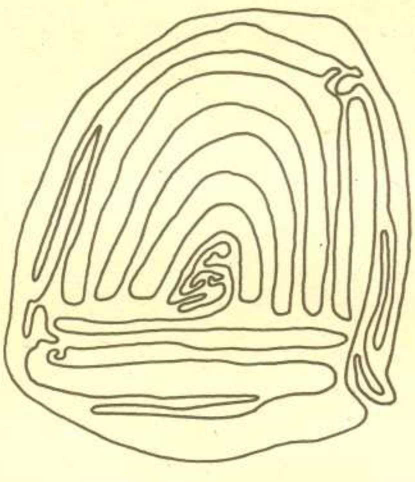
Rogata sfera Alexandera

Dr Krzysztof CIESIELSKI, dr Zdzisław POGODA

Matematyka, w przeciwieństwie do wielu innych gałęzi nauki, jest dyscypliną bardzo konkretną. Nie zdarzy się tu wypadek, że teoria, radośnie rozgłaszana przez wielu entuzjastów, po paru latach ulegnie zmianie pod wpływem nowej mody czy innych zewnętrznych czynników. Po latach może się jedynie zmienić waga rezultatów; można też wiele uprościć. Ale jeżeli wynik nie zawierał błędu, to pozostaje prawdziwy. Niemniej jednak matematyków często czekają inne niespodzianki.

Wiele twierdzeń, z pozoru bardzo skomplikowanych, po bliższym zbadaniu okazuje się być prostymi. Ale zdarza się, i to nad wyraz często, coś wręcz przeciwnego. Fakt, pozornie bardzo prosty i oczywisty, długo opiera się wszelkim próbom dowodu. Banalny, wydawałoby się, rezultat jest w istocie trudny. Klasycznym przykładem, często cytowanym, jest twierdzenie Jordana.

Najpierw podamy dwie definicje. Krzywa Jordana jest to zbiór homeomorficzny z okręgiem (homeomorfizm to „bijekcja w obie strony ciągła"). Mówiąc potocznie, krzywą Jordana na płaszczyźnie tworzymy wyginając okrąg na wszelkie możliwe sposoby. Nie wolno nam jednak niczego rozrywać ani kleić. Natomiast obszarem w $\mathbf{R}^n$ nazywamy zbiór otwarty, w którym dwa dowolne punkty możemy połączyć linią zawartą w tym zbiorze. Twierdzenie Jordana, do którego zmierzaliśmy, mówi, że *każda krzywa Jordana na płaszczyźnie rozcina ją na dwa obszary* (*jeden ograniczony, drugi nie*) *i jest ich wspólnym brzegiem.* Oczywiste? A nad poprawnym dowodem można się bardzo długo męczyć. Twierdzenie pochodzi z końca XIX wieku. Tym, którzy sądzą, że tu nie ma nic do dowodzenia, radzimy obejrzeć załączony rysunek krzywej.



Na początku XX wieku A. Schönflies udowodnił piękne twierdzenie, będące uogólnieniem twierdzenia Jordana. Twierdzenie Schönfliesa brzmi: *dowolny homeomorfizm krzywej Jordana* (*zawartej w płaszczyźnie*), *na okrąg możemy rozszerzyć do homeomorfizmu płaszczyzny na siebie.* Oznacza to, że mając powyginany (nawet bardzo fantazyjnie) okrąg na płaszczyźnie możemy tak deformować płaszczyznę (homeomorficznie, bez rozrywania i sklejania), by po owej deformacji okrąg przeszedł właśnie na naszą krzywą. Z tego rezultatu twierdzenie Jordana wynika w sposób prosty. Jak? Zauważmy, że okrąg rozcina płaszczyznę na dwa obszary.

To zrozumiałe; można je nawet opisać analitycznie: $\mathbf{R}^2 = \{(x, y): x^2+y^2 < 1\} \cup \{(x, y): x^2+y^2 = 1\} \cup \cup \{(x, y): x^2+y^2 > 1\}$. A teraz wystarczy wykazać, że w homeomorfizmie obrazem obszaru jest obszar, obrazem brzegu figury jest brzeg figury, oraz że figura domknięta i ograniczona (u nas — koło domknięte) przejdzie w figurę domkniętą i ograniczoną. To jednak nie sprawia wielkich trudności.

Twierdzenie Schönfliesa można sformułować także w innej wersji. Rozważmy krzywą Jordana na płaszczyźnie. Zgodnie z twierdzeniem Jordana wycina ona z płaszczyzny dwa obszary, z których jeden jest ograniczony. Twierdzenie Schönfliesa mówi, że ów obszar ograniczony wraz z krzywą, przez którą został wycięty, jest zbiorem homeomorficznym z kołem domkniętym.

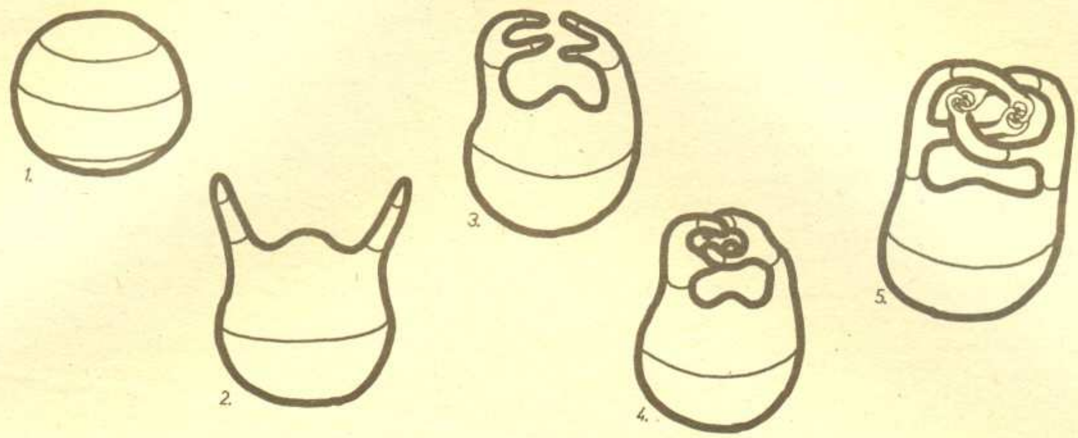
Analitycznie opisujemy: $\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n): x_i \in \mathbf{R}\}$, $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}: x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$. Geometrycznie wyobrażamy sobie $\mathbf{R}^2$ jako płaszczyznę, $\mathbf{R}^3$ jako przestrzeń. Zbiór S^n nazywamy sferą n-wymiarową (zawartą w $\mathbf{R}^{n+1}$). Sfera jednowymiarowa to po prostu okrąg jednostkowy, dwuwymiarowa — znana nam sfera. Twierdzenie Jordana jest prawdziwe dla $\mathbf{R}^n$; zbiór homeomorficzny ze sferą $(n-1)$-wymiarową rozcina $\mathbf{R}^n$ (n-wymiarową przestrzeń) na dwa obszary (jeden ograniczony) i jest ich wspólnym brzegiem. My skoncentrujemy swoją uwagę na przypadku trójwymiarowym ($S^2 \subset \mathbf{R}^3$).

Wydawać by się mogło, że i twierdzenie Schönfliesa można przenieść na wyższe wymiary. Niestety, przestrzeń n-wymiarowa (dla $n \geqslant 3$) nie zachowuje się tak dobrze jak płaszczyzna. W wielu wypadkach już przestrzeń trójwymiarowa płata matematykom figle. Tak było i w tym przypadku. W 1924 roku J. W. Alexander podał przykład dziwnego zbioru (nazywanego obecnie rogatą sferą Alexandera). Przykład ten wykazuje, że twierdzenia Schönfliesa nie można uogólnić już na przypadek $\mathbf{R}^3$. Innymi słowy, istnieje w przestrzeni zbiór homeomorficzny ze sferą (dwuwymiarową) taki, że homeomorfizmu nie da się rozszerzyć do homeomorfizmu $\mathbf{R}^3$ na siebie.

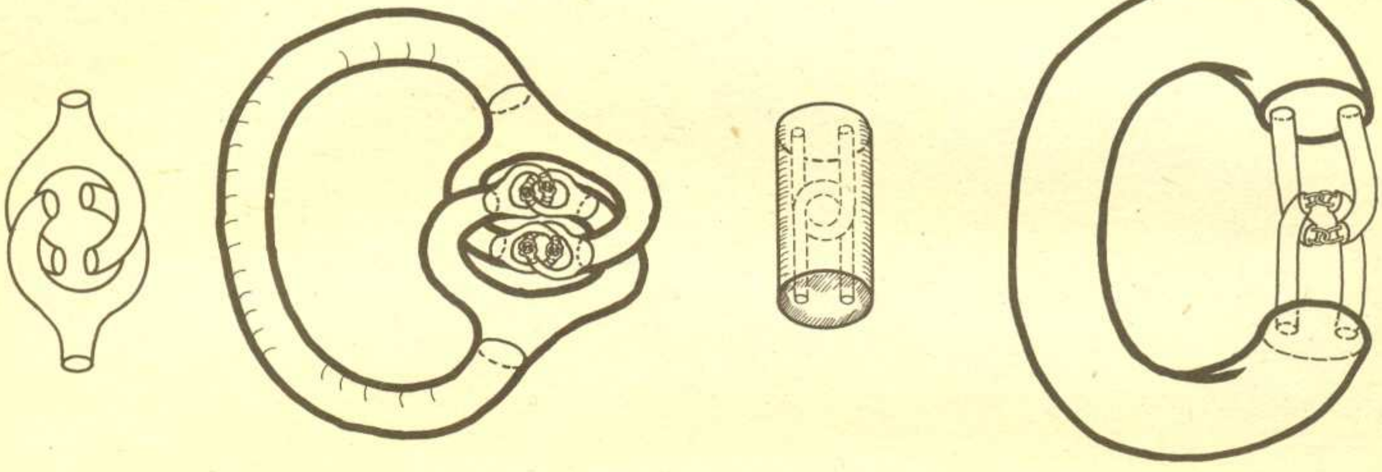
Przypomnijmy sobie drugą wersję twierdzenia Schönfliesa. W tym wypadku otrzymany efekt w $\mathbf{R}^3$ wydaje się jeszcze bardziej paradoksalny. Bo cóż on oznacza? Ni mniej, ni więcej, tylko, że zbiór homeomorficzny ze sferą wraz z wyciętym przezeń z przestrzeni obszarem ograniczonym wcale nie musi być homeomorficzny z kulą! Innymi słowy: „sfera" wraz ze swoją „zawartością, wnętrzem" — „kulą" być nie musi. Twierdzenie Schönfliesa wydawało się prawdziwe dla $n = 3$; można zatem spodziewać się, że przykład nie okaże się wyjątkowo prosty. Tak jest w istocie. Konstrukcja sfery rogatej (albo, jak się także często mówi — dzikiej) jest nieco skomplikowana.

Weźmy zwykłą sferę i pociągnijmy ją z dwóch boków tak, by wyciągnąć z niej dwie wypustki — jakby macki, rączki. Rączki ciągniemy do góry i skręcamy do środka. Teraz każdą z rączek rozszczepiamy na dwie (powstają jakby obcęgi) i powstałe odgałęzienia przeplatamy ze sobą. W tej chwili mamy już cztery rączki, ale cieńsze niż dwie poprzednie — zaplecione ze sobą. Tę konstrukcję kontynuujemy indukcyjnie. Mając w n-tym kroku 2^n rączek każdą rozszczepiamy i konstruujemy 2^{n+1} obejmujących się odgałęzień.

To jest idea, według której tworzymy nasz zbiór, dokładniej myśl konstrukcji pokazują rysunki. Precyzyjnie sferę rogatą konstruuje się jako granicę odpowiedniego ciągu zbiorów.



Dziką sferę Alexandera można otrzymać wiel oma sposobami. Sugestię dwóch innych konstrukcji (za pomocą torusów) przedstawiają rysunki.



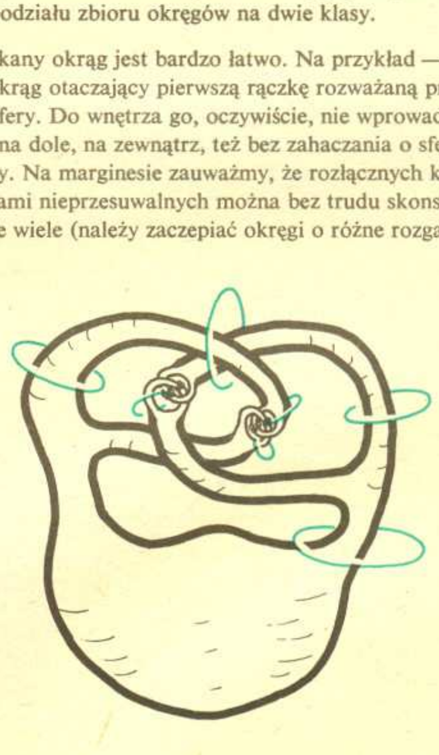
Sfera Alexandera jest homeomorficzna ze zwykłą; dowód tego nie jest zbyt trudny. Pokażemy (opiszemy ideę rozumowania), że homeomorfizmu jednej sfery na drugą nie można rozszerzyć do całej przestrzeni.

Rozważmy zbiór A zawarty w $\mathbf{R}^3$ i dwa okręgi rozłączne z nim. Przypuśćmy, że jeden okrąg można przesunąć (ewentualnie rozciągając lub ściągając) na drugi nie zahaczając po drodze o zbiór A. Powiemy w takim wypadku, że para okręgów ma „własność przesunięcia obok A". Spróbujmy bardziej formalnie: okręgi γ_0 i γ_1 mają własność przesunięcia obok A wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja ciągła $F:[0, 1]\times S^1 \to \mathbf{R}^3$, że $F(0, S^1) = \gamma_0$, $F(1, S^1) = \gamma_1$, $F([0, 1]\times S^1)\cap A = \emptyset$. Teraz przekształćmy $\mathbf{R}^3$ homeomorficznie na siebie. Oczywiście para okręgów ma wprowadzoną własność wtedy i tylko wtedy, gdy ich obrazy mają własność przesunięcia obok obrazu A.

Teraz rozważmy sferę „normalną". Łatwo widać, że wszystkie okręgi, które nie mają z nią punktów wspólnych, możemy podzielić na dwa rozłączne zbiory — „wewnątrz" sfery i „na zewnątrz". Dowolne dwa okręgi z tej samej grupy mają własność przesunięcia obok sfery. Gdyby homeomorfizm przekształcający sferę na sferę rogatą dawał się rozszerzyć na $\mathbf{R}^3$, wszystkie okręgi rozłączne ze sferą Alexandera też dałyby się tak pogrupować. To jednak nie zachodzi! Weźmy jeden okrąg wewnątrz sfery Alexandera, drugi zaś na zewnątrz, pod sferą. Ta para okręgów, oczywiście, własności przesunięcia nie spełnia.

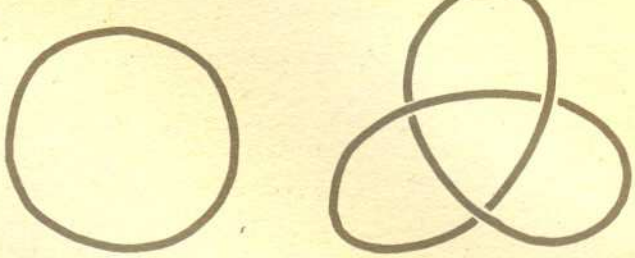
Pokażemy trzeci okrąg, który nie spełnia tej własności z żadnym z wymienionych dwóch. Zakończy to dowód, gdyż zaprzeczy możliwości podziału zbioru okręgów na dwie klasy.

Wskazać szukany okrąg jest bardzo łatwo. Na przykład — niech nim będzie okrąg otaczający pierwszą rączkę rozważaną przy konstrukcji sfery. Do wnętrza go, oczywiście, nie wprowadzimy— a do okręgu na dole, na zewnątrz, też bez zahaczania o sferę nie dojdziemy. Na marginesie zauważmy, że rozłącznych klas okręgów parami nieprzesuwalnych można bez trudu skonstruować nieskończenie wiele (należy zaczepiać okręgi o różne rozgałęzienia).



Przykładów zbiorów położonych „dziko", osobliwie, jest więcej; rogata sfera nie jest unikatem. Na nieco innej konstrukcji oparty jest zbiór mający podobne własności, mianowicie sfera Antoine'a. My nie będziemy w tej chwili poświęcać mu uwagi, zajmiemy się tym innym razem.

Wiemy, że w topologii zbiory homeomorficzne uznawane są za nierozróżnialne. Przykład rogatej sfery pokazuje, że na tym poprzestać nie można. Dwa zbiory są homeomorficzne, ale mają istotnie różne własności. Można też znaleźć prostszy przykład: okrąg w $\mathbf{R}^3$ (nie na płaszczyźnie!) homeomorficzny z zawęźloną pętlą. Sugeruje to wprowadzenie następującej definicji: dwa zbiory są jednakowo położone w $\mathbf{R}^n$, jeśli istnieje homeomorfizm $\mathbf{R}^n$ na siebie, przekształcający jeden zbiór na drugi. Przykład sfery Alexandera dowodzi, że nie wszystkie „sfery dwuwymiarowe" są jednakowo położone w $\mathbf{R}^3$. Natomiast — jest to praktycznie



inne sformułowanie twierdzenia Schönfliesa — każde dwie krzywe Jordana są jednakowo położone na płaszczyźnie. Takimi problemami zajmuje się jeden z działów topologii, teoria położenia. Ale to już inna historia, choć związana z przed chwilą przedstawionym zagadnieniem.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 472. Znaleźć maksymalną liczbę punktów przecięcia przekątnych wielokąta wypukłego.
Rozwiązanie na str. 2

M 473. Udowodnić, że jeśli co najmniej jedna współrzędna środka okręgu jest niewymierna, to na okręgu istnieją co najwyżej dwa punkty o współrzędnych wymiernych.
Rozwiązanie na str. 2

M 474. Znaleźć taką podstawę r ($r < 100$) systemu pozycyjnego, by liczba $(2101)_r$ była pełnym kwadratem.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 222. Na płaską granicę dwóch ośrodków o współczynnikach załamania n_1 i n_2 i jednakowych współczynnikach przenikalności magnetycznej μ_0 pada prostopadle płaska, monochromatyczna fala elektromagnetyczna o jednostkowej amplitudzie. Wykazać, że współczynnik odbicia, tj. stosunek energii światła odbitego do energii światła padającego, nie zależy od tego, czy światło pada od strony ośrodka o większym współczynniku załamania, czy od strony przeciwnej.
Rozwiązanie na str. 1

F 223. Wiązka światła pada na szklaną płytkę płasko-równoległą. Uwzględniając wielokrotne odbicie w płytce znaleźć współczynnik odbicia światła od płytki. Zaniedbać pochłanianie światła w płytce. Założyć, że kąt padania wiązki jest niewielki, a współczynnik odbicia przy jednokrotnym odbiciu od granicy powietrze-szkło wynosi k.
Rozwiązanie na str. 2