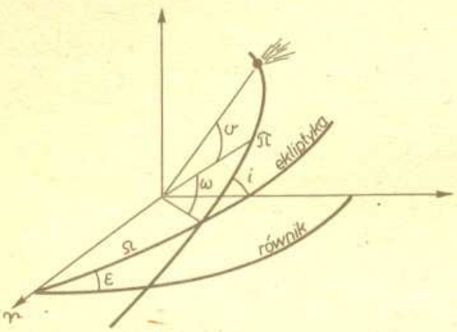
O wyznaczaniu orbit

Dr Tomasz KWAST

Ruch — powiedzmy — komety wokół Słońca jest w pełni określony przez podanie jej trzech współrzędnych położenia (x_0, y_0, z_0) oraz trzech współrzędnych prędkości $(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$ w dowolnej chwili. Znajomość tych sześciu parametrów jest równoważna znajomości całego „mechanicznego" życia komety, bowiem parametry te są konieczne i wystarczają do jednoznacznego rozwiązania równań ruchu komety.

Parametry te nie są jednak najwygodniejsze w użyciu chociażby z tego powodu, że nieskończenie wiele ich zestawów może odpowiadać temu samemu obiektowi. Dlatego w astronomii za „znaki szczególne" obiektów obiegających Słońce uważa się sześć innych wielkości zwanych elementami orbity, które mają bardzo naturalną interpretację geometryczną i stanowią w rezultacie „paszport" danego obiektu. Przedstawiliśmy je w *Delcie* 12/1986, chyba jednak nie będzie źle, jeśli je teraz przypomnimy (rys. 1).

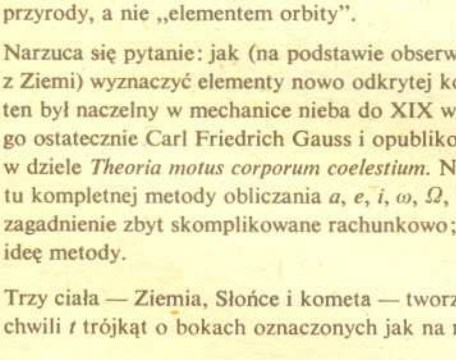


Rys. 1

Położenie płaszczyzny orbity względem ekliptyki (uwaga: ekliptyki!) opisują dwa kąty: Ω — długość ekliptyczna węzła wstępującego orbity, i — nachylenie. Położenie orbity już w jej płaszczyźnie opisuje kąt ω — tzw. argument szerokości perihelium, rozmiary orbity określa jej wielka półoś a, kształt — mimośród e, wreszcie pozostaje T jako moment przejścia obiektu przez perihelium. Kąt ε między płaszczyznami równika i ekliptyki jest, oczywiście, stałą przyrody, a nie „elementem orbity".

Narzuca się pytanie: jak (na podstawie obserwacji prowadzonych z Ziemi) wyznaczyć elementy nowo odkrytej komety? Problem ten był naczelny w mechanice nieba do XIX w. Rozwiązał go ostatecznie Carl Friedrich Gauss i opublikował w 1809 r. w dziele *Theoria motus corporum coelestium*. Nie przedstawimy tu kompletnej metody obliczania $a, e, i, \omega, \Omega, T$ — jest to zagadnienie zbyt skomplikowane rachunkowo; pokażemy tylko ideę metody.

Trzy ciała — Ziemia, Słońce i kometa — tworzą w każdej chwili t trójkąt o bokach oznaczonych jak na rysunku 2.



Rys. 2

Współrzędne geocentryczne komety (w układzie współrzędnych z rysunku 1) tworzą wektor $\boldsymbol{\varrho} = [\xi, \eta, \zeta]$, jej współrzędne heliocentryczne wektor $\boldsymbol{r} = [x, y, z]$, a współrzędne Słońca względem Ziemi $\boldsymbol{R} = [X, Y, Z]$ i uważamy je za znane skądinąd — można je obliczyć z góry lub znaleźć w rocznikach astronomicznych. Między współrzędnymi tych wektorów zachodzą oczywiste związki:

$$\xi = \varrho\cos\delta\cos\alpha = x+X,$$
$$\eta = \varrho\cos\delta\sin\alpha = y+Y,$$
$$\zeta = \varrho\sin\delta \quad = z+Z,$$

gdzie α i δ oznaczają rektascensję i deklinację komety, x, y, z zaś wyrażają się w mocno skomplikowany sposób przez $a, e, i, \omega, \Omega, T$. Te właśnie wielkości musimy wyznaczyć, jasne jednak, że jest to na razie niewykonalne, skoro mamy mniej równań niż niewiadomych.

I tak dochodzimy do najważniejszego punktu całego zagadnienia. Zwiększenie liczby równań uzyskuje się wykonując dalsze obserwacje. Nie zapominajmy jednak, że przy każdej obserwacji oprócz sześciu elementów mamy dodatkową niewiadomą — odległość komety od Ziemi ϱ, bowiem obserwacja, czyli pomiar rektascensji i deklinacji, daje tylko kierunek do komety. Dlatego właściwą liczbę równań osiągnie się dopiero po **trzech** obserwacjach — wtedy dopiero będzie 9 równań na tyleż niewiadomych: $a, e, i, \omega, \Omega, T, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$.

Od tej chwili problem przestaje być astronomiczny, a staje się czysto rachunkowy: jak rozwiązać, przyznajmy — dość skomplikowany — układ równań? Jest to rzeczywiście pracochłonne nawet z użyciem kalkulatora. Aby nie być gołosłownym, przedstawiamy komplet niezbędnych formuł. Wprowadźmy oznaczenia:

$$P_x = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i,$$
$$Q_x = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i,$$
$$P_y = (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)\cos\varepsilon - \sin\omega\sin i\sin\varepsilon,$$
$$Q_y = (-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)\cos\varepsilon - \cos\omega\sin i\sin\varepsilon,$$
$$P_z = (\cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i)\sin\varepsilon + \sin\omega\sin i\cos\varepsilon,$$
$$Q_z = (-\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i)\sin\varepsilon + \cos\omega\sin i\cos\varepsilon.$$

Wtedy

$$x = P_x x_0 + Q_x y_0,$$
$$y = P_y x_0 + Q_y y_0,$$
$$z = P_z x_0 + Q_z y_0,$$

gdzie $x_0 = r\cos v$, $y_0 = r\sin v$ (v jest tzw. anomalią prawdziwą komety i jest zaznaczona na rysunku 1). Ponadto

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}$$

i np. jeżeli $e < 1$ (kometa porusza się po elipsie), to pomocnicza zmienna E (zwana anomalią mimośrodową) wiąże się z anomalią prawdziwą v zależnością $\mathrm{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tg}\frac{E}{2}$.

Na koniec E wiąże się z T poprzez tzw. równanie Keplera

$$E - e\sin E = \mathrm{k}a^{-3/2}(t-T),$$

gdzie $k = 0{,}017202099$. Wszystkie odległości (r, ϱ, a) są tu liczone w jednostkach astronomicznych, czas zaś — w dniach.

Problem odwrotny, czyli obliczenie położenia komety w zadanej chwili przy znajomości elementów jej orbity, jest dużo prostszy. Obliczenia takiej — jak mówimy — efemerydy można dokonać już na podstawie przytoczonych tu wzorów.