Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Redaguje
dr Marcin E. KUCZMA

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3\ S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 141 /WT=1,79/ i 142 /WT=2,99/
z numeru 12/1986

Michał Marczak	- Radom	42,65pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	40,61pkt
Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	38,38pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	38,24pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	37,99pkt
Karol Jachacy	- Tłuszcz	37,96pkt
Sławomir Solecki	- Ostrów Wkp.	37,60pkt

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1987

Przypominamy treść zadań:

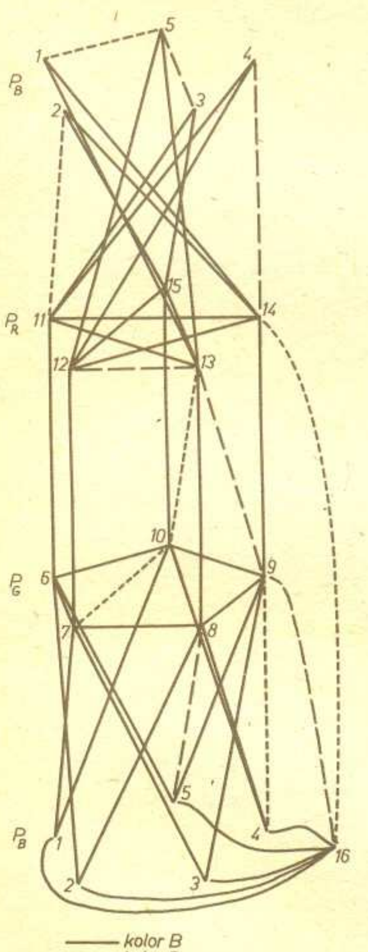
145. Dać przykład wielokąta (o jak największej liczbie wierzchołków) z bokami i przekątnymi pokolorowanymi trzema kolorami tak, by żadne trzy odcinki (boki lub przekątne) jednego koloru nie tworzyły trójkąta.

146. Rozwiązać (w liczbach rzeczywistych x, y) równanie

$$\frac{(x+y-1)^2+x+y}{(x-y-3)^2+1}+\frac{(x-y-3)^2-1}{(x+y-1)^2-x-y+2}=0.$$

145. Na okładce tego numeru pokazany jest szesnastokąt pokolorowany w żądany sposób. Opis tego rysunku daje następująca tabelka:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	*B*	*B*	*B*	*B*	*B*	*G*	*G*	*G*	*G*	*G*	*R*	*R*	*R*	*R*	*R*
15	*R*	*B*	*B*	*R*	*G*	*G*	*R*	*R*	*G*	*B*	*G*	*B*	*B*	*G*	
14	*B*	*B*	*R*	*G*	*R*	*R*	*R*	*G*	*B*	*G*	*B*	*B*	*G*		
13	*B*	*R*	*G*	*R*	*B*	*R*	*G*	*B*	*G*	*R*	*B*	*G*			
12	*R*	*G*	*R*	*B*	*B*	*G*	*B*	*G*	*R*	*R*	*G*				
11	*G*	*R*	*B*	*B*	*R*	*B*	*G*	*R*	*R*	*G*					
10	*B*	*G*	*G*	*B*	*R*	*B*	*R*	*R*	*B*						
9	*G*	*G*	*B*	*R*	*B*	*R*	*R*	*B*							
8	*G*	*B*	*R*	*B*	*G*	*R*	*B*								
7	*B*	*R*	*B*	*G*	*G*	*B*									
6	*R*	*B*	*G*	*G*	*B*										
5	*R*	*G*	*G*	*R*											
4	*G*	*G*	*R*												
3	*G*	*R*													
2	*R*														



Natomiast rysunek obok przedstawia inną realizację tego samego grafu. W przestrzeni trójwymiarowej umieszczamy cztery pięciokąty (np. foremne), jeden nad drugim, przy czym pięciokąty skrajne (górny i dolny) utożsamiamy. Oznaczmy te pięciokąty symbolami P_B, P_G, P_R, P_B; ich wierzchołki numerujemy od 1 do 15, jak na rysunku (numery wierzchołków w jednym pionie przystają modulo 5). Kolorem B malujemy: boki P_G, przekątne P_R, krawędzie boczne graniastosłupa P_GP_R, przekątne ścian bocznych graniastosłupa P_BP_G, przekątne wewnętrzne graniastosłupa P_RP_B. (Wszystkie te odcinki zostały zaznaczone na rysunku; żadne trzy z nich nie tworzą trójkąta.) Przenosimy teraz całą tę konfigurację odcinków o jeden poziom w górę (cyklicznie: $P_B \to P_G \to P_R \to P_B$) i wszystkie otrzymane w ten sposób odcinki malujemy kolorem G. Idziemy jeszcze o jedno piętro w górę i malujemy kolorem R. W ten sposób mamy pokolorowany graf pełny o 15 wierzchołkach. Możemy jeszcze dołączyć szesnasty wierzchołek (np. gdzieś z boku lub w czwartym wymiarze) i połączyć go kolorem X z wierzchołkami pięciokąta $P_X (X = B, G, R)$; nadal nie będzie jednobarwnego trójkąta. (Na rysunku zaznaczono tylko po sześć odcinków kolorów G i R.) Przenosząc wszystko na płaszczyznę dostajemy rysunek z okładki.

Dalej pójść się nie da. W rozwiązaniu zadania **137** (*Delta* 2/1987) udowodniony został lemat, który sformułowany w języku grafów brzmi następująco: niech $n_1 = 2$, $n_k = kn_{k-1}+1$ $(k = 2, 3, \ldots)$; przy dowolnym pokolorowaniu k kolorami krawędzi grafu pełnego mającego więcej niż n_k wierzchołków musi powstać trójkąt jednobarwny. Dla $k = 3$ mamy $n_3 = 16$. Nie istnieje więc siedemnastokąt dopuszczający pokolorowanie, o jakim mowa w zadaniu.

146. Przy oznaczeniach $u = (x+y-1)^2$, $v = (x-y-3)^2$, $s = x+y$ równanie przybiera postać: $\dfrac{u+s}{v+1}+\dfrac{v-1}{u-s+2} = 0$, a po krótkich przekształceniach: $u^2+v^2+2u = (s-1)^2$, czyli $u^2+v^2+u = 0$. Stąd $u = v = 0$, czyli $x = 2$, $y = -1$. Przez podstawienie sprawdzamy, że te liczby spełniają równanie.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1987

Przypominamy treść zadań:

43. Bombę kalorymetryczną napełniono w temperaturze 18°C mieszaniną tlenu i metanu pod ciśnieniem 1 MPa, przy czym ciśnienia cząstkowe obu gazów były jednakowe. Po szczelnym zamknięciu bomby wywołano w niej reakcję spalania metanu. Jakie ciśnienie będzie panowało w bombie po jej ostygnięciu do pierwotnej temperatury?

44. Wiadomo, że hamowanie przez górne warstwy atmosfery wpływa na tory sztucznych satelitów powodując ich stopniowe przybliżanie się do powierzchni Ziemi, czemu — paradoksalnie — towarzyszy wzrost prędkości. Przyjmując, że tor satelity ma kształt spirali o stałym kącie pochylenia θ, wykazać, że między składową przyspieszenia w kierunku ruchu a_r a siłą oporów F zachodzi związek $ma_r = -F$ (m — masa satelity). Wyjaśnić pozorną sprzeczność z drugą zasadą dynamiki.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 39 /WT=2,01/ i 40 /WT=2,88/
z numeru 12/1986

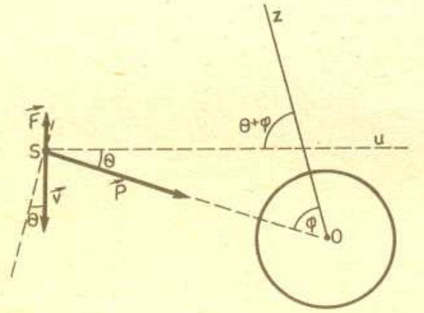
Aleksander Surma	- Myszków	38,65pkt
Anna Gluza	- Toruń	34,23pkt
Piotr Bała	- Toruń	32,22pkt
Robert Repucha	- Gołdap	31,15pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	28,85pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	27,26pkt
Jerzy Lipkowski	- Elbląg	24,61pkt
Piotr Wach	- Katowice	24,22pkt

43. Bomba kalorymetryczna jest to urządzenie do badania reakcji chemicznych, zachowuje ono stałą objętość. Wobec jednakowych ciśnień cząstkowych, równych 0,5 MPa, w bombie znajdują się początkowo takie same liczby moli metanu i tlenu — oznaczmy je przez n. Można przyjąć, że reakcja spalania metanu

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O$$

zachodzi do całkowitego wyczerpania tlenu. W takim razie końcowa mieszanina będzie zawierała $n/2$ moli metanu, $n/2$ moli dwutlenku węgla oraz n moli wody.
Jak wynika z prawa Clapeyrona, ciśnienie cząstkowe gazu zawartego w stałej objętości (i w stałej temperaturze) jest proporcjonalne do liczby moli tego gazu. Zatem końcowe ciśnienia cząstkowe metanu i dwutlenku węgla będą wynosić 0,25 MPa. Woda natomiast ulegnie skropleniu — ciśnienie jej pary nasyconej w temperaturze 18°C wynosi zaledwie 2 kPa. Wobec tego końcowe ciśnienie w bombie będzie równe $2 \cdot 0{,}25$ MPa $= 0{,}5$ MPa. Wpływ ciśnienia pary wodnej, a także — jak można obliczyć — objętości zajmowanej przez skroploną wodę, jest niewielki: w sumie poniżej jednego procenta (oba te czynniki wpływają na pewien wzrost całkowitego ciśnienia końcowego, z drugiej natomiast strony rozpuszczanie się gazów w wodzie może to ciśnienie nieco obniżyć).

44. Na rysunku S oznacza satelitę, O — środek Ziemi, $\boldsymbol{v}$ — prędkość satelity, $\boldsymbol{F}$ — siłę oporów, $\boldsymbol{P}$ — siłę przyciągania Ziemi, θ — kąt pochylenia toru względem orbity kołowej, φ — kąt między promieniem wodzącym OS a ustaloną półprostą Oz leżącą w płaszczyźnie orbity, Su — półprostą w płaszczyźnie orbity prostopadłą do $\boldsymbol{v}$.



Wprowadzamy ponadto oznaczenia: M — masa Ziemi, m — masa satelity, G — stała grawitacji, $r = OS$ — odległość satelity od środka Ziemi, a_d — przyspieszenie dośrodkowe satelity, a_r — przyspieszenie w kierunku ruchu.
Siła grawitacji ma wartość

$$P = \frac{GMm}{r^2}. \tag{1}$$

Przyspieszenie dośrodkowe, skierowane wzdłuż półprostej Su, jest więc równe

$$a_d = \frac{P\cos\theta}{m} = \frac{GM}{r^2}\cos\theta. \tag{2}$$

Z drugiej strony $a_d = v\omega$, gdzie $\omega = \frac{d(\theta+\varphi)}{dt}$ (pochodna względem czasu).
W związku z przyjętym założeniem, że $\theta = \text{const}$, mamy zatem

$$a_d = v\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Pochodną $\frac{d\varphi}{dt}$ wyznaczamy z zależności

$$r\frac{d\varphi}{dt} = v\cos\theta \tag{4}$$

i w rezultacie ze związków (2), (3), (4) otrzymujemy wyrażenie na prędkość satelity:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}. \tag{5}$$

Prędkość ta jest taka sama, jak na orbicie kołowej o promieniu r.
Składowa przyspieszenia w kierunku ruchu jest równa

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}, \text{ przy czym } \frac{dr}{dt} = -v\sin\theta.$$

Ze wzoru (5) znajdujemy

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{2r}\sqrt{\frac{GM}{r}} = -\frac{1}{2}\frac{v}{r}.$$

Wobec tego

$$a_r = \frac{1}{2}\frac{v^2\sin\theta}{r}. \tag{6}$$

Z drugiej strony wypisujemy równanie ruchu

$$ma_r = P\sin\theta - F.$$

Po skorzystaniu ze wzorów (1) i (5) otrzymujemy

$$a_r = \frac{v^2\sin\theta}{r} - \frac{F}{m}. \tag{7}$$

Z przyrównania wyrażeń (6) i (7) wynika wzór

$$F = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{r}\sin\theta,$$

który po uwzględnieniu związków (1) i (5) przyjmuje postać

$$F = \frac{1}{2}P\sin\theta.$$

Wnioskujemy stąd, iż kąt θ przyjmuje taką wartość, że składowa siły przyciągania ziemskiego w kierunku ruchu dwukrotnie przewyższa siłę oporów, mając przeciwny do niej zwrot. Dlatego wynikający ze wzorów (6) i (7) związek $F = -ma_r$ nie jest sprzeczny z drugą zasadą dynamiki: działająca na satelitę wypadkowa siła w kierunku ruchu jest równa co do wartości sile F, lecz ma przeciwny do niej zwrot. Identyczne wnioski otrzymuje się również przy słabszym założeniu co do kąta pochylenia orbity θ: wystarczy tylko, aby kąt ten zmieniał się odpowiednio wolno.