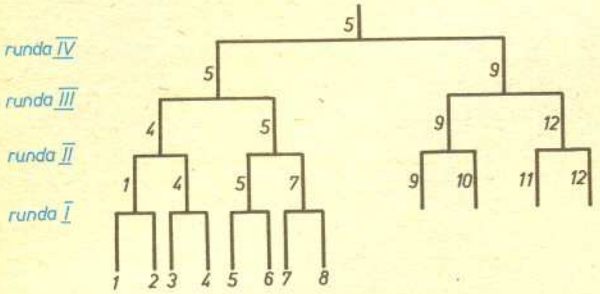
Zadanie o turnieju tenisowym

Dr Lech BANACHOWSKI

W rozgrywkach sportowych w rodzaju turnieju tenisowego mamy do czynienia z niesprawiedliwym rozdziałem nagród dla najlepszych. Rozważmy typowy pucharowy turniej tenisowy między dwunastoma graczami i przedstawmy jego wyniki za pomocą następującego diagramu:



W finale gracz 5 wygrywa z graczem 9. Nie ma, oczywiście, wątpliwości, że gracz 5 jest najlepszy ze wszystkich i rzeczywiście zasłużył na pierwszą nagrodę. Niesprawiedliwość wiąże się natomiast z przydzieleniem drugiej nagrody graczowi 9, bo nie ma pewności, że jest on faktycznie drugim najlepszym zawodnikiem turnieju. Jeżeli w turnieju bierze udział $n = 2^k$, graczy, to z prawdopodobieństwem $\frac{2^{k-1}-1}{2^k-1} \simeq \frac{1}{2}$ drugą nagrodę otrzymuje niewłaściwa osoba!

Przyjmuje się, że relacja „gracz A jest lepszy od gracza B" ustala liniowy porządek w zbiorze graczy. Oznacza to, że relacja ta jest przechodnia i antysymetryczna.

Problemem sprawiedliwego rozdziału nagród zajął się w roku 1883 Charles Lutwidge Dodgson, znany powszechnie pod pseudonimem Lewis Carroll, i sam zaprojektował procedurę turniejową, która prowadzi do prawidłowego przyznania pierwszej, drugiej i trzeciej nagrody. Jego procedura pozwala przegrywającym kontynuować rozgrywanie meczów, dopóki nie przegrają trzech pojedynków. System Carrolla, chociaż poprawny, okazał się nieoptymalny pod względem liczby rozgrywanych meczów. Problem zaprojektowania optymalnej procedury turniejowej prowadzącej do wyznaczenia dwóch najlepszych graczy postawił Hugo Steinhaus w trakcie seminarium, które odbywało się w latach 1929—30. Turniej taki po raz pierwszy został zaprojektowany w roku 1932 przez Józefa Schreiera. Jednakże załączony przez niego dowód optymalności okazał się niepoprawny. Następny dowód optymalności procedury turniejowej Schreiera, podany w 1951 roku przez Jerzego Słupeckiego, też był niepoprawny. Dopiero w 1964 roku matematykowi radzieckiemu Siergiejowi S. Kislicynowi udało się udowodnić optymalność procedury turniejowej Schreiera. Poniżej przytoczymy ten dowód.

Zauważmy najpierw, że procedura pucharowa jest optymalna, gdy mamy wyłowić tylko najlepszego zawodnika. Przy n uczestnikach rozgrywa się, jak łatwo obliczyć, $n-1$ meczów i jest to ich najmniejsza możliwa liczba. Przy dowolnym wyborze procedury turniejowej każdy, z wyjątkiem gracza, który zostaje zwycięzcą turnieju, musi przegrać co najmniej jeden mecz.

Procedura Schreiera jest prosta. Najpierw systemem pucharowym wyznacza się najlepszego gracza, a następnie dla graczy, którzy przegrali bezpośrednio ze zwycięzcą, organizuje się dodatkowy turniej pucharowy. Zwycięzca dogrywki jest, oczywiście, drugim najlepszym zawodnikiem turnieju. Jeśli przez k oznaczymy liczbę naturalną, dla której $2^{k-1} < n \leqslant 2^k$, to liczba meczów dla procedury turniejowej Schreiera jest nie większa niż $(n-1)+(k-1) = n+k-2$.

Pokażemy, że procedura Schreiera jest optymalna pod względem liczby rozgrywanych meczów, tzn. dla każdej procedury turniejowej istnieje taki układ sił n graczy, że trzeba wtedy rozegrać co najmniej $n+k-2$ meczów. W tym celu zrezygnujemy teraz ze „sportu". Zamiast niego wprowadzimy wyrokowanie, który z graczy wygrywa mecz niezależnie od graczy, a jedynie w zależności od rozstawienia graczy do pojedynków przy danej procedurze turniejowej.

Rozważmy dowolną procedurę turniejową dla n graczy pozwalającą wyznaczyć gracza najlepszego M oraz drugiego najlepszego gracza S.

Pokażemy najpierw, że istnieje turniej skonstruowany zgodnie z tą procedurą, w którym gracz M rozgrywa co najmniej k meczów. Użyjemy w tym celu tzw. metody wyroczni. Procedura turniejowa określa nam kolejny mecz do rozegrania, powiedzmy — między graczami i oraz j, a wyrocznia podaje wynik tego meczu w taki sposób, aby zmusić zawodnika najlepszego do rozegrania co najmniej k meczów.

W każdym momencie rozgrywania turnieju z każdym graczem wiążemy następującą wielkość:

t_i — liczba meczów wygranych przez gracza i z graczami, których pierwszą porażką w turnieju jest porażka z graczem i.

Opiszemy teraz, jak działa wyrocznia. Załóżmy, że w danym momencie rozgrywek procedura turniejowa podaje, że ma być rozegrany mecz między graczami i oraz $j (i < j)$. Jeżeli obaj gracze nie przegrali jeszcze żadnego meczu, to wyrocznia ogłasza zwycięzcą meczu gracza i, o ile $t_i \geqslant t_j$ oraz gracza j, o ile $t_j > t_i$. Jeżeli jeden z graczy nie przegrał jeszcze żadnego meczu, a drugi już poniósł porażkę, to wyrocznia uznaje za zwycięzcę tego gracza, który nie przegrał jeszcze meczu. Wreszcie jeżeli obaj gracze ponieśli już porażki, to wyrocznia ogłasza zwycięzcą dowolnego z nich, ale tak, by tworzony porządek był przechodni i antysymetryczny.

Pokażemy, że

$$t_M \geqslant k. \tag{1}$$

W tym celu w każdym momencie rozgrywania turnieju z każdym graczem i, który do tej pory nie poniósł porażki, wiążemy wielkość p_i. Na początku turnieju $p_i = 1$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Wielkość p_i ulega zmianie tylko wtedy, gdy gracz i pokonuje gracza j, dla którego porażka ta jest pierwszą porażką w turnieju. Wówczas wielkość p_i ulega zmianie na p_i+p_j (p_j przestaje być określone z definicji). Przez indukcję względem liczby rozegranych meczów można łatwo wykazać, że w każdej chwili rozgrywania turnieju:

(2) suma wszystkich wielkości p_i dla graczy, którzy nie ponieśli jeszcze porażki, równa się n;

(3) $p_i \leqslant 2^{t_i}$ dla każdego gracza i, który nie poniósł jeszcze żadnej porażki.

Na zakończenie turnieju tylko jeden gracz, mianowicie M, jest bez porażki. Wobec (2), $p_M = n$. Stąd i z (3) wnioskujemy, że $2^{t_M} \geqslant n$, co dowodzi nierówności (1). Ponieważ łączna liczba meczów rozegranych przez gracza M jest nie mniejsza niż t_M, więc wykazaliśmy, że gracz M rozegrał co najmniej k meczów.

Poniższa tabelka ilustruje działanie wyroczni dla $n = 5$ (wówczas $k = 3$).

Wektor wielkości $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$	Wektor wielkości $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$	Gracze wystawieni do meczu	Wybór wyroczni
(0, 0, 0, 0, 0)	(1, 1, 1, 1, 1)	1,2	1
(1, 0, 0, 0, 0)	(2, —, 1, 1, 1)	3,4	3
(1, 0, 1, 0, 0)	(2, —, 2, —, 1)	2,4	2
(1, 0, 1, 0, 0)	(2, —, 2, —, 1)	2,5	5
(1, 0, 1, 0, 0)	(2, —, 2, —, 1)	1,5	1
(2, 0, 1, 0, 0)	(3 —, 2, —, —)	3,5	3
(2, 0, 1, 0, 0)	(3, —, 2, —, —)	1,3	1
(3, 0, 1, 0, 0)	(5, —, —, —, —)		

Na zakończenie turnieju skonstruowanego przez wyrocznię $p_1 = 5$, a $t_1 = 3$. Zwycięzca turnieiu — gracz 1 rozegrał $t_1 = 3$ mecze.

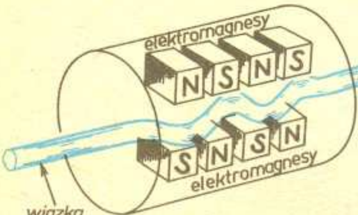
Zauważmy, że każdy zawodnik różny od M i S musi zostać pokonany przez gracza różnego od M — meczów takich musi się odbyć łącznie co najmniej $n-2$. Zatem w turnieju będącym wynikiem dialogu wyroczni z procedurą turniejową rozegrano co najmniej $n+k-2$ meczów.

Zadania

1. Podać dowód indukcyjny faktów (2) i (3).
2. Podać konstrukcję procedury pucharowej do wyznaczenia trzech najlepszych graczy w turnieju za pomocą $n-3+\lceil \lg_2 n \rceil + \lceil \lg_2(n-1) \rceil$ meczów (zauważmy, że $k = \lceil \lg_2 n \rceil$).
3. Podać konstrukcję procedury pucharowej do wyznaczenia wszystkich n miejsc w turnieju (w informatyce jest to znany problem sortowania) za pomocą $\sum_{i=1}^{n} \lceil \lg_2 i \rceil$ meczów.
4. Zadania wyznaczenia najlepszych zawodników turnieju mają swoje odpowiedniki w problemach informatycznych. W zadaniu rozważanym w artykule pytamy się o element największy i drugi największy w podanym ciągu elementów zbioru liniowo uporządkowanego. Czytelnika znającego programowanie zachęcamy do zapisu metody turniejowej w postaci algorytmu wyznaczającego dwa największe elementy ciągu. Leżąca u podstaw struktura danych pełni ważną rolę przy rozwiązywaniu problemu sortowania zewnętrznego: sortowania zbiorów danych, które się nie mieszczą w dostępnej pamięci wewnętrznej komputera.

Laser na swobodnych elektronach

W zwykłych laserach światło generowane jest dzięki promieniowaniu wysyłanemu przez atomy lub cząsteczki ośrodka. Elektrony związane w atomach (cząsteczce) przechodząc na niższe stany energetyczne wysyłają fotony. Jeżeli przejścia te wymuszone są przez wiązkę światła, to emitowane fotony są identyczne z fotonami padającego promieniowania i powstaje akcja laserowa. Aby proces był możliwy, trzeba odpowiednio przygotować ośrodek (wzbudzić jego atomy) dostarczając mu energię, której niewielką tylko część, sięgającą kilku procent, odzyskujemy w postaci światła laserowego.



wiązka elektronów

Okazuje się, że można osiągnąć o wiele większą sprawność akcji laserowej zmuszając do świecenia elektrony swobodne (nie związane w atomach). Jeżeli wiązkę bardzo szybkich elektronów przepuścimy przez obszar, w którym pole magnetyczne wielokrotnie zmienia swój zwrot (jak na rysunku), to elektrony przyspieszane prostopadle do kierunku ruchu będą promieniowały. Natężenie promieniowania będzie największe w kierunku zgodnym z ruchem wiązki. Dzięki zjawisku Dopplera częstość promieniowania będzie większa od częstości poprzecznych drgań elektronów. Zaletą lasera na swobodnych elektronach jest możliwość, przez zmianę prędkości wiązki, łatwego przestrajania długości emitowanych fal od podczerwieni do nadfioletu. Konstruktorzy spodziewają się, że niedługo będzie możliwe otrzymanie w ten sposób lasera na promienie rentgenowskie.

W laserach na swobodnych elektronach osiągnięto już sprawność 42 procent, a za praktyczną granicę uważa się sprawność 70 procent. Jak twierdzi konstruktor pierwszego lasera tego typu, John J. M. Madey (obecnie pracujący w Stanford University), na pomysł urządzenia wpadł jeszcze w 1963 roku, gdy był studentem California Institute of Technology. W pełni działające urządzenie wykorzystujące wiązkę stanfordzkiego liniowego akceleratora elektronów zostało ukończone w 1977 roku. Od tego czasu na świecie zbudowano tylko około dziesięciu laserów tego typu, gdyż mimo licznych zalet są one bardzo drogie (najmniejsze z nich kosztują po kilka milionów dolarów). Zainteresowanie jednak rośnie. Entuzjaści twierdzą, że lasery na swobodnych elektronach znajdą zastosowanie w chirurgii (do niszczenia chorych tkanek), w badaniach półprzewodników, badaniu i kontroli reakcji chemicznych, a także w ramach systemów obronnych będą używane do niszczenia rakiet przeciwnika.

Rozpoczęto już budowę ogromnego lasera w Nowym Meksyku. Po ukończeniu urządzenie będzie miało około 16 km długości i 3 km szerokości (koszty oceniono wstępnie na miliard dolarów) i będzie najpotężniejszym laserem na Ziemi.

A. M.