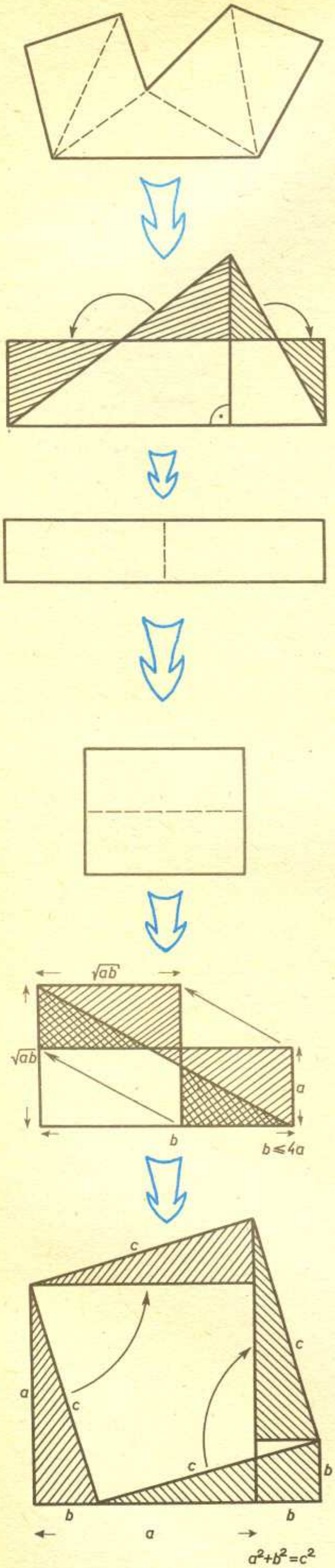

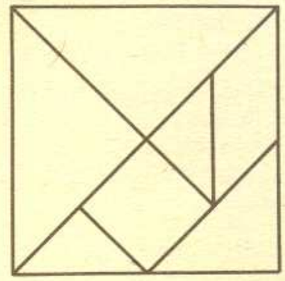

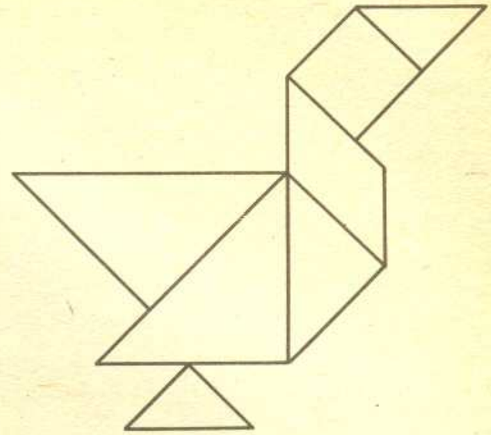

Paradoksalny rozkład kuli

Doc. dr Wojciech GUZICKI, dr Piotr ZAKRZEWSKI

Każdy z Was na pewno kiedyś bawił się tangramem, kwadratem pociętym na kawałki, z których można złożyć ogromną ilość różnych figur geometrycznych, często o cieszących oko kształtach. Spotyka się również inne podobne łamigłówki. Często w kącikach rozrywkowych różnych czasopism formułuje się wprost następujące zadanie: pociąć narysowany wielokąt na kawałki w taki sposób, by złożyć z nich kwadrat, trójkąt, krzyż czy jakąś inną figurę geometryczną. Czasami stawia się ograniczenia na linie podziału, najczęściej żądając, by były one prostymi. Zastanówmy się jednak, czy tak postawione zadanie o wielokątach ma zawsze rozwiązanie.

Zadanie: Na płaszczyźnie dane są dwa wielokąty A i B. Rozłożyć wielokąt A na mniejsze wielokąty tak, aby można było z nich złożyć wielokąt B.

Każdy natychmiast dostrzega warunek konieczny istnienia takiego rozkładu: pola wielokątów A i B muszą być takie same. Pole wielokąta będzie bowiem sumą pól wielokątów, na które go podzieliliśmy (część wspólna dowolnych dwóch wielokątów podziału jest sumą odcinków — ma więc zerowe pole) i pole nie zmienia się przy przekładaniu wielokąta z jednego miejsca na inne. Ten warunek konieczny jest również wystarczający. Proponujemy Czytelnikowi samodzielne odtworzenie na podstawie rysunków na marginesie dowodu tego twierdzenia, udowodnionego przez Bolyaia i Gerwiena.

Teraz spróbujemy rozważyć trudniejsze zadanie. Rozkładajmy dowolne zbiory A i B na sumy dowolnych innych zbiorów, byle odpowiednio przystających (zbiory przystające to takie, które można nałożyć przez izometrię, czyli przekształcenie nie zmieniające odległości). Będziemy zakładać, że zbiory, na które dzielimy, są rozłączne, nie ograniczamy się natomiast do podzbiorów płaszczyzny $\mathbf{R}^2$.

Definicja. Dwa zbiory $A, B \subseteq \mathbf{R}^n$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$) są równoważne przez rozkład skończony, jeśli istnieją zbiory $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_m$ takie, że
(a) $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m, \quad B = B_1 \cup \ldots \cup B_m$;
(b) $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$, o ile $i \neq j$;
(c) zbiory A_i i B_i są przystające dla $i = 1, \ldots, m$.

Podkreślmy, że kawałki, na które rozkładamy zbiory A i B, mogą być zupełnie dowolne i dalekie od jakiejkolwiek geometrycznej regularności — pojęcie równoważności przez rozkład skończony ma więc wyraźnie teoriomnogościowy charakter.

Problemem, jakie zbiory są równoważne przez rozkład skończony, zajmowali się w latach dwudziestych Stefan Banach i Alfred Tarski, dowodząc twierdzenia znanego pod nazwą twierdzenia o paradoksalnym rozkładzie kuli.

Twierdzenie: Każde dwa ograniczone zbiory $A, B \subseteq \mathbf{R}^3$ o niepustych wnętrzach są równoważne przez rozkład skończony. W szczególności dowolna kula jest równoważna kuli o dwukrotnie większym promieniu.

Zastanówmy się, na czym polega paradoksalność twierdzenia Banacha—Tarskiego. Jego sprzeczność z intuicją związana jest chyba z naszymi wyobrażeniami o masie czy w przypadku brył jednorodnych — objętości. Czy możliwe byłoby rozłożenie kulki ze złota na kawałki tak, aby z nich można było złożyć kulkę dwa razy większą, a więc osiem razy cięższą?! To przecież lepiej niż zamiana ołowiu w złoto za pomocą kamienia filozoficznego — nie potrzebujemy nawet ołowiu!

Wyjaśnienie paradoksalności tej interpretacji jest proste — kulka składa się ze skończonej liczby niepodzielnych cząstek (wyrażony jest tu pogląd jednego z autorów, drugi, którego ojciec jest fizykiem, woli nie wypowiadać się na ten temat), nie można więc dzielić jej na dowolne zbiory tak, jak możemy dzielić istniejące tylko w naszej wyobraźni idealne podzbiory przestrzeni $\mathbf{R}^3$. Z tej strony średniowiecznym alchemikom nie grozi więc na razie konkurencja.

Nie wyjaśnia to jednak, w jaki sposób możliwe jest powiększenie objętości bryły tylko w wyniku rozkładania jej na mniejsze i składania w inny sposób. Musimy więc dokładniej prześledzić rozumowanie przeprowadzone poprzednio dla wielokątów i zobaczyć, czy przenosi się ono na przypadek dowolnych zbiorów. Powtarzając to rozumowanie powiedzielibyśmy: zbiór A rozkładamy na sumę rozłącznych zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ przystających odpowiednio do rozłącznych zbiorów $B_1, \ldots, B_n$, z których składa się zbiór B. Objętość zbioru A jest zatem sumą objętości zbiorów $A_1, \ldots, A_n$, te z kolei mają te same objętości, co $B_1, \ldots, B_n$ (bo zbiory przystające mają te same objętości), których suma jest objętością zbioru B. Zgadza się, prawda? W tym rozumowaniu założyliśmy milcząco, że każdy zbiór w przestrzeni ma objętość, tzn. że istnieje funkcja m przyporządkowująca każdemu zbiorowi $A \subseteq \mathbf{R}^3$ liczbę $m(A)$ w taki sposób, że

(1) (addytywność) jeśli $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ i zbiory $A_1, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, to $m(A) = m(A_1) + \ldots + m(A_n)$,

(2) (niezmienniczość) jeśli zbiory A i B są przystające, to $m(A) = m(B)$.

Każda taka funkcja m nazywa się uniwersalną, niezmienniczą ze względu na izometrie miarą skończenie addytywną.

Teraz sytuacja powoli staje się jasna. Założyliśmy milcząco, że tąka miara istnieje. Czy jednak potrafimy tego dowieść? Otóż twierdzenie Banacha—Tarskiego pokazuje właśnie, że takich miar w przestrzeni $\mathbf{R}^3$ nie ma. Paradoksalne jest więc nie to, że z kuli można zrobić dwa razy większą, ale to, iż myślimy, że umiemy zmierzyć objętość każdego zbioru w przestrzeni.

Inaczej mówiąc, jeśli chcemy określić niezmienniczą miarę skończenie addytywną w $\mathbf{R}^3$, to musimy zrezygnować z jej uniwersalności — zawsze będą istniały zbiory niemierzalne. Oczywiście rodzina zbiorów mierzalnych, tzn. tych, na których miara jest określona, musi spełniać następujące warunki:

(1) jeśli A, B są mierzalne, to $A \cup B$, $A \cap B$, A' też są mierzalne,

(2) jeśli zbiór B jest izometrycznym obrazem zbioru mierzalnego A, to zbiór B jest mierzalny.

Takie rodziny zbiorów nazywamy niezmienniczymi (ze względu na izometrie) ciałami zbiorów. Przykładem miary określonej na takim ciele zbiorów jest miara Jordana. Opiszemy ją w przypadku płaszczyzny $\mathbf{R}^2$, uogólnienie na przestrzeń $\mathbf{R}^3$ będzie łatwym ćwiczeniem dla Czytelnika.

Chcąc zmierzyć pole zbioru A pokrywamy go siatką kwadratów o boku ε i obliczamy dwie liczby:

$N(\varepsilon)$ = liczba kwadratów przecinających zbiór A,
$n(\varepsilon)$ = liczba kwadratów zawartych w zbiorze A.

$N(\varepsilon)=20$
$n(\varepsilon)=4$

Następnie przechodzimy do granicy dla $\varepsilon \to 0$ i kładziemy

$m(A) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \cdot N(\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \cdot n(\varepsilon)$, o ile obie granice istnieją i są równe.

Dowodzi się, że tak zdefiniowana miara Jordana jest niezmiennicza ze względu na izometrie. Miara Jordana odpowiada pojęciu długości (w $\mathbf{R}$), pola (w $\mathbf{R}^2$) czy objętości (w $\mathbf{R}^3$). Np. dwuwymiarowa miara Jordana prostokąta jest iloczynem jednowymiarowych miar jego boków.

Ciało zbiorów mierzalnych w sensie Jordana jest dość obszerne. W szczególności wielokąty na płaszczyźnie są mierzalne względem miary Jordana. Z łatwością dowodzimy teraz konieczności warunku równości pól w twierdzeniu Bolyaia-Gerwiena. Wystarczy powtórzyć przeprowadzone na początku rozumowanie traktując pole wielokąta jako jego miarę Jordana i korzystając z jej addytywności i niezmienniczości.

Rozwiązanie zadania F 221. Z rozwiązania zadania F 220 wynika, że średnia droga swobodna jest odwrotnie proporcjonalna do ciśnienia. Wewnątrz bańki termosu $\lambda \simeq 1$ cm. Oznacza to, że cząsteczki praktycznie nie zderzają się między sobą, a jedynie ze ściankami bańki. Przy zderzeniu z zewnętrzną ścianką cząsteczki uzyskują średnio energię kinetyczną odpowiadającą temperaturze pokojowej $T_0 = 293$ K. Załóżmy, że przy zderzeniu ze ścianką wewnętrzną uzyskiwana energia odpowiada średniej temperaturze tej ścianki w ciągu stygnięcia, tj. $T = (T_1+T_2)/2 = 353$ K. Energia przenoszona przez jedną cząsteczkę jest równa

$$w = \frac{c_v}{\mathrm{N_A}}(T-T_0),$$

gdzie dla gazu doskonałego, złożonego z molekuł dwuatomowych $c_v = \frac{5}{2}\mathrm{R}$ (R — stała gazowa, $\mathrm{N_A}$ — liczba Avogadra). Liczba cząsteczek zderzających się w jednostce czasu z jednostką powierzchni wynosi

$$z = \frac{2nv_{śr}}{6} \simeq \frac{P\mathrm{N_A}}{3\mathrm{R}T_0}\sqrt{\frac{3\mathrm{R}T}{\mu \mathrm{N_A}}},$$

gdzie $v_{śr}$ jest średnią prędkością cząsteczek, μ — masą 1 mola powietrza. Ilość traconego w jednostce czasu ciepła jest więc równa

$$q = zwS = \frac{5}{2\sqrt{3}}P\sqrt{\frac{\mathrm{R}T}{\mu\mathrm{N_A}}}\,\frac{(T-T_0)\cdot S}{T_0} \simeq 1{,}85 \text{ J/s}.$$

Stąd czas stygnięcia

$$t = \frac{mc_w(T_1-T_2)}{q} \simeq 4{,}5\times 10^4 \text{ s} \simeq 12{,}5 \text{ h},$$

gdzie c_w jest ciepłem właściwym wody.

Widać też od razu, że w twierdzeniu Banacha—Tarskiego zbiory, na które rozkładamy kulę, muszą być niemierzalne nie tylko względem miary Jordana, ale także względem każdej innej miary niezmienniczej, względem której obie kule były mierzalne.

Pojawia się naturalne pytanie, czy paradoks Banacha—Tarskiego można powtórzyć na płaszczyźnie. Czy istnieją np. dwa wielokąty o różnych polach równoważne przez rozkład skończony. Nadzieje na to przekreśla następujące twierdzenie Banacha:

Twierdzenie. Na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ istnieje uniwersalna, niezmiennicza ze względu na izometrie miara skończenie addytywna, rozszerzająca miarę Jordana.

Z twierdzenia Banacha wynika natychmiast, że jeśli dwa mierzalne w sensie Jordana podzbiory płaszczyzny są równoważne przez rozkład skończony, to mają tę samą miarę Jordana.

Sytuacja na płaszczyźnie jest zatem całkowicie odmienna od sytuacji w przestrzeni trójwymiarowej Skąd bierze się ta zasadnicza różnica? Okazuje się, że powody leżą w algebraicznej strukturze grup izometrii. Podstawowym krokiem w dowodzie twierdzenia Banacha—Tarskiego jest znalezienie dwóch izometrii φ i ψ przestrzeni $\mathbf{R}^3$ (w istocie są to obroty wokół dwóch różnych osi przechodzących przez początek układu współrzędnych) o tej własności, że równość

$$\varphi^{k_1} \circ \psi^{l_1} \circ \ldots \circ \varphi^{k_n} \circ \psi^{l_n} = \mathrm{id}$$

nie zachodzi dla żadnych, różnych od zera, liczb całkowitych k_i, l_i. Oznacza to, że grupa $G_{\varphi,\psi}$ złożona ze wszystkich izometrii postaci

$$\varphi^{k_1} \circ \psi^{l_1} \circ \ldots \circ \varphi^{k_n} \circ \psi^{l_n}$$

jest tzw. grupą wolną o dwóch generatorach φ i ψ. Analiza dowodu twierdzenia Banacha—Tarskiego pokazuje, że właśnie obecność wolnej podgrupy $G_{\varphi,\psi}$ w grupie izometrii $\mathbf{R}^3$ umożliwia swobodę w manipulowaniu punktami niezbędną do uzyskania paradoksalnego rozkładu.

Zbiór przekształceń, który wraz z dwoma przekształceniami zawiera ich złożenie oraz przekształcenia odwrotne do każdego z nich i jest niepusty, nazywamy grupą przekształceń.
Każdy zbiór przekształceń wzajemnie jednoznacznych określony przez warunek postaci: ,,wszystkie przekształcenia, które zachowują ..." tworzy grupę. W szczególności grupę tworzą izometrie.

Argumentu powyższego nie da się zastosować w przypadku płaszczyzny. ,,Łatwo" bowiem wykazać, że jeśli φ i ψ są dowolnymi izometriami płaszczyzny $\mathbf{R}^2$, to

$$\varphi^2 \circ \psi^2 \circ \varphi^{-2} \circ \psi^{-2} \circ \varphi^{-2} \circ \psi^2 \circ \varphi^4 \circ \psi^{-2} \circ \varphi^{-2} \circ \psi^2 \circ \varphi^{-2} \circ \psi^{-2} \circ \varphi^2 = \mathrm{id},$$

co dowodzi, że $G_{\varphi,\psi}$ nie jest grupą wolną o generatorach φ i ψ.

Istnienie miary, o której mówi twierdzenie Banacha, zagwarantowane jest przez tzw. rozwiązalność grupy izometrii płaszczyzny.
Przyjrzyjmy się temu pojęciu.

Jeśli G jest dowolną grupą przekształceń, to przez $[G, G]$ oznaczamy zbiór złożony ze wszystkich przekształceń postaci $f \circ g \circ f^{-1} \circ g^{-1}$, gdzie $f, g \in G$. Okazuje się, że zbiór $[G, G]$ jest podgrupą grupy G.

Przez indukcję definiujemy zstępujący ciąg podgrup grupy G:

$$G_0 = G, \qquad G_{n+1} = [G_n, G_n].$$

Jeśli zdarzy się, że dla pewnej liczby n grupa G_n jest trywialna: $G_n = \{\mathrm{id}\}$, to mówimy, że grupa G jest rozwiązalna.

Zauważmy, że grupa G jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy $G_1 = [G, G] = \{\mathrm{id}\}$. Każda grupa przemienna jest więc rozwiązalna. Nietrudno sprawdzić, że grupa G izometrii płaszczyzny jest też rozwiązalna ($G_3 = \{\mathrm{id}\}$, wystarczy pokazać, że G_2 jest grupą przesunięć).

Prawdziwa jest następująca ogólniejsza wersja twierdzenia Banacha:

Twierdzenie. Jeśli G jest rozwiązalną podgrupą grupy izometrii przestrzeni $\mathbf{R}^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), to w przestrzeni $\mathbf{R}^n$ istnieje skończenie addytywna miara uniwersalna rozszerzająca miarę Jordana i niezmiennicza ze względu na izometrie należące do grupy G.

Z tego twierdzenia wynika w szczególności, że paradoksalnego rozkładu kuli nie udałoby się uzyskać używając wyłącznie przesunięć i obrotów względem osi o ustalonym kierunku (dlaczego?).

Warto podkreślić, że dowód twierdzenia Banacha najłatwiej przeprowadza się metodami analizy funkcjonalnej. Jest to więc kolejna, obok geometrii, algebry, teorii miary i teorii mnogości dyscyplina matematyczna ,,zaangażowana" w te zagadnienia. Między innymi dzięki tej różnorodności używanych technik problematyka ta stanowi interesujące pole badań.

Na zakończenie przypomnijmy otwarty dotychczas problem sformułowany przez A. Tarskiego w 1924 roku: czy koło i kwadrat o tych samych polach są równoważne przez rozkład skończony? Tę nową wersję kwadratury koła pozostawimy Czytelnikowi jako zadanie na długie zimowe wieczory (najbliższych, oby tylko kilku, zim).

Rozwiązanie zadania M 469. Oznaczmy przez X liczbę rzutów. Wtedy $P(X = k) = p \cdot q^{k-1}$, gdzie $q = 1 - p$, co wynika z niezależności rezultatów kolejnych rzutów. Obliczmy $\mathrm{E}X$.

$$\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p \cdot q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-q) \cdot q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \cdot q^m - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \sum_{m=0}^{\infty} m \cdot q^m + \sum_{m=0}^{\infty} q^m - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}.$$

Rozwiązanie zadania M 470. Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. W pierwszym rzucie otrzymujemy pewien wynik. Teraz prawdopodobieństwo uzyskania innego wyniku w pojedynczym rzucie wynosi $\frac{5}{6}$, zatem średni czas oczekiwania jest równy $\frac{6}{5}$. Podobnie, średnie czasy oczekiwania na kolejne ,,brakujące" liczby oczek wynoszą $\frac{6}{4}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{6}{2}$ i $\frac{6}{1}$, sumując je otrzymujemy

$$6\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) = 14{,}7.$$