Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1987

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.
Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę cen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Zadania z matematyki nr 151, 152

151. Zaprojektować sieć dróg o minimalnej łącznej długości, łączących cztery miejscowości usytuowane w wierzchołkach kwadratu.

152. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 1$ spełniona jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^3 > 2(n^2+n-2).$$

Zadanie **152** przysłał pan Jan Ciach z Ostrowca Świętokrzyskiego

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 139 /WT=2,46/ i 140 /WT=2,01/
z numeru 11/1986

Henryk Mikołajczak	- Wałbrzych	45,52pkt
Michał Marczak	- Radom	40,38pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	39,41pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	36,20pkt
Karol Jachacy	- Tłuszcz	36,17pkt

Pan Mikołajczak został czterdziestym piątym członkiem Klubu 44 M.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1987

Przypominamy treść zadań:

143. Wewnątrz kwadratu umieszczono skończoną liczbę rozłącznych kół domkniętych. Dowieść, że można ten kwadrat podzielić na wielokąty wypukłe o rozłącznych wnętrzach, zawierające po jednym z danych kół.

144. Dowieść, że równanie $1987y^2 = 1+x+x^2+x^3+x^4$ nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych x, y.

143. Oznaczmy dany kwadrat przez Q, jego wnętrze przez Q^0, a koła przez $K_1, \ldots, K_n$. Dla dowolnego punktu P (w płaszczyźnie kwadratu Q) oznaczmy przez $\varrho_i(P)$ potęgę punktu P względem okręgu będącego brzegiem koła K_i ($i = 1, \ldots, n$). (Jeśli O_i, r_i oznaczają środek i promień koła K_i, to $\varrho_i(P) = O_iP^2 - r_i^2$.) Wiadomo, że dla $i \neq j$ zbiór $H_{ij} = \{P: \varrho_i(P) \leqslant \varrho_j(P)\}$ jest półpłaszczyzną domkniętą, a jej wnętrze, czyli półpłaszczyzna otwarta $H_{ij}^0 = \{P: \varrho_i(P) < \varrho_j(P)\}$, zawiera koło K_i. Przyjmijmy

$$W_i = \{P \in Q: \varrho_i(P) = \min_{1 \leqslant j \leqslant n} \varrho_j(P)\} = Q \cap \bigcap_{j=1}^{n} H_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Oczywiście $\bigcup_{i=1}^{n} W_i = Q$. Każdy ze zbiorów W_i jest wielokątem wypukłym (jako wspólna część kwadratu i skończonej liczby półpłaszczyzn). Wnętrzem wielokąta W_i jest zbiór

$$W_i^0 = \{P \in Q^0 : \varrho_i(P) < \min_{j \neq i} \varrho_j(P)\} = Q^0 \cap \bigcap_{j=1}^{n} H_{ij}^0.$$

Widać stąd, że wnętrza te są rozłączne (tylko jedna z liczb $\varrho_1(P), \ldots, \varrho_n(P)$ może być minimum właściwym) oraz że $K_i \subset W_i^0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

144. Przypuśćmy, że liczby wymierne $x = a/b$ i $y = c/d$ spełniają dane równanie, NWD $(a, b) =$ $=$ NWD $(c, d) = 1$. Liczbę pierwszą 1987 oznaczmy krótko przez p. Równanie przybiera postać

$$pc^2b^4 = d^2q,$$

gdzie

$$q = a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4, \qquad \text{NWD}\,(b, q) = \text{NWD}\,(c, d) = 1,$$

a stąd $d^2 = b^4$ i $q = pc^2$. Mnożąc ostatnią równość stronami przez $a-b$ dostajemy

$$a^5-b^5 = pc^2(a-b).$$

Dalsze rozważania prowadzimy dla reszt z dzielenia przez 5; wszystkie napisane niżej kongruencje są brane modulo 5. Ponieważ $p \equiv 2$, $a^5 \equiv a$, $b^5 \equiv b$, więc z otrzymanego równania wynika

$$(a-b)(2c^2-1) \equiv 0.$$

Drugi czynnik nigdy nie jest $\equiv 0$. Zatem $a \equiv b$, tak, że $q \equiv 5a^4 \equiv 0$. Wracamy do równania $q = pc^2$ i dostajemy $c \equiv 0$. A więc q dzieli się przez 5^2. Stąd i z równości

$$q = (a-b)^4+5a^3b-5a^2b^2+5ab^3 = (a-b)^4+5ab(a-b)^2+5(ab)^2$$

wnosimy, że $ab \equiv 0$. W rezultacie $a \equiv b \equiv 0$, wbrew temu, że NWD $(a, b) = 1$.

Rozwiązanie zadania F 220. Zderzenie cząsteczek powietrza rozpatrywanych jako kulki zajdzie, jeśli odległość między ich środkami będzie mniejsza od średnicy d. Wybrana cząsteczka zderza się ze wszystkimi cząsteczkami, których środki znajdują się w „łamanym" cylindrze o przekroju πd^2 (załamania odpowiadają kolejnym zderzeniom wybranej cząsteczki). Średnia liczba cząsteczek w cylindrze o długości l wynosi

$$N = n \cdot l \cdot \pi d^2,$$

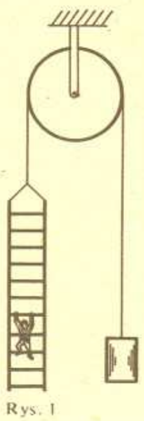
gdzie n jest liczbą cząsteczek w jednostce objętości. Średnia droga swobodna jest więc równa

$$\lambda = \frac{l}{nl\pi d^2} = \frac{RT_0}{N_A P_0 \pi d^2} \simeq 8{,}75 \times 10^{-8}\ \text{m},$$

gdzie skorzystaliśmy z równania stanu gazu doskonałego; N_A jest liczbą Avogadra, a R stałą gazową. Względny ruch molekuł prowadzi do zmniejszenia λ o czynnik $1/\sqrt{2}$, co daje wynik bliski $6{,}2 \times 10^{-8}$ m.

Zadania z fizyki nr 49, 50

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



Rys. 1

49. Na jednym końcu liny przerzuconej przez blok stały (rysunek 1) zamocowana jest drabinka sznurowa o masie m, na której znajduje się człowiek o masie M, na drugim końcu liny wisi przeciwciężar o masie $M+m$. Układ ten początkowo pozostaje w spoczynku. W pewnym momencie człowiek zaczyna się wspinać po drabince i pokonuje na niej odcinek o długości l. Obliczyć drogę, jaką przebył człowiek w układzie odniesienia związanym z Ziemią, przy założeniu, że masy bloku i liny są bardzo małe w stosunku do M i m, a tarcie jest zaniedbywalne.

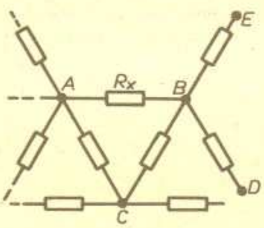
50. Pragniemy sfotografować pejzaż w świetle Księżyca tak, aby uzyskane zdjęcie było zbliżone jasnością do zdjęcia wykonanego w warunkach dziennych. Ile, orientacyjnie, razy czas ekspozycji podczas pełni Księżyca, przy bezchmurnym niebie winien być dłuższy od czasu ekspozycji przy bezpośrednim oświetleniu słonecznym? W przybliżonych rachunkach przyjąć, że średnica kątowa tarczy Księżyca wynosi 0,5° oraz że powierzchnia Księżyca odbija około 0,1 padającego promieniowania.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1987

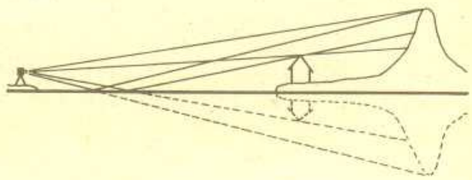
Przypominamy treść zadań:

41. Fotografując z brzegu jeziora o gładkiej powierzchni przeciwległy brzeg otrzymano obraz tego brzegu wraz z jego odbiciem w wodzie. W jaki sposób można określić, co jest odbiciem w wodzie, jeśli obie połowy zdjęcia nie różnią się pod względem ostrości ani jasności?

42. Rysunek 2 przedstawia fragment sieci złożonej z oporów o nie znanych wartościach. W jaki sposób można wyznaczyć wartość oporu R_x nie przerywając nigdzie sieci, jeśli dysponuje się tylko omomierzem i przewodami do połączeń?



Rys. 2



Rys. 3

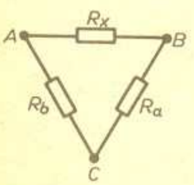
41. Na podstawie rysunku 3 przedstawiającego bieg promieni bezpośrednich i odbitych od powierzchni jeziora widzimy, że obraz odbity w wodzie stanowi ta połowa zdjęcia, na której przedmioty bliższe (domy i drzewa) usytuowane są wyżej na tle przedmiotów dalszych (góry).

42. Treść zadania dopuszcza zwieranie przewodami poszczególnych węzłów sieci. Doprowadzamy zatem rozpatrywany obwód do postaci przedstawionej na rysunku 4, tak, aby żadne „ścieżki" oporów nie bocznikowały bezpośrednio oporu R_x. Możemy tego dokonać na przykład przez zwarcie ze sobą punktów C, D oraz E. Dalsze postępowanie jest proste. Zwieramy kolejne pary punktów B-C, C-A, A-B i za każdym razem wyznaczamy wypadkowy opór omomierzem (przyrząd ten określa opór na podstawie pomiaru natężenia płynącego w obwodzie prądu przy znanym napięciu zasilającym), jak na rysunku 5 a, b, c. Oznaczając odpowiednie wskazania omomierza przez R_1, R_2, R_3, mamy

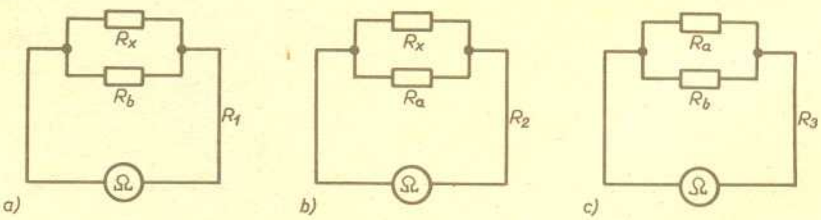
$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_b},\quad \frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_x}+\frac{1}{R_a},\quad \frac{1}{R_3}=\frac{1}{R_a}+\frac{1}{R_b}.$$

Stąd obliczamy

$$R_x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)^{-1}.$$



Rys. 4



Rys. 5

czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 37 /WT=2,35/ i 38 /WT=1,58/ z numeru 11/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	45,66pkt
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	44,61pkt
Aleksander Surma	- Myszków	37,19pkt
Anna Gluza	- Toruń	31,47pkt
Piotr Bała	- Toruń	28,77pkt
Robert Repucha	- Gołdap	26,46pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	26,09pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	24,39pkt

Panowie Rawlik i Lipniacki przekroczyli 44 punkty, zatem Klub 44 F liczy już trzech członków.

Rozwiązanie zadania M 471. Liczba elementów takiego ciała wynosi 2^k, gdzie $k \geq 1$.

Oznaczmy przez A_x część wspólną wszystkich elementów $\mathscr{F}$, do których należy x. Ponieważ $\mathscr{F}$ jest skończone, $A_x \in \mathscr{F}$. Oczywiście $x \in A_x$, ponadto dla dowolnego $B \in \mathscr{F}$ mamy $B \cap A_x = \emptyset$ albo $B \cap A_x = A_x$. Istotnie, jeśli $x \in B$, to $A_x = A_x \cap B$, jeśli zaś $x \notin B$, to $A_x = A_x \cap B'$, więc $A_x \cap B = \emptyset$.
W szczególności wynika stąd, że $A_y \cap A_x = \emptyset$ albo $A_y = A_x$. Zbiór A został zatem rozbity na skończoną liczbę niepustych i rozłącznych zbiorów $A_{x_1}, \ldots, A_{x_k}$.
Dla $B \in \mathscr{F}$ mamy

$$B=(B\cap A_{x_1})\cup\ldots\cup(B\cap A_{x_k})= = A_{x_{i_1}}\cup\ldots\cup A_{x_{i_m}}.$$

Elementów w $\mathscr{F}$ jest więc tyle, ile podzbiorów zbioru k-elementowego, czyli 2^k.
Uwaga. Analogicznie dowodzi się, że nie może istnieć nieskończone i przeliczalne σ-ciało (czyli rodzina podzbiorów zamknięta ze względu na przeliczalne działania na zbiorach).