

Proste, szkolne zadanie

Doc. dr Andrzej SZYMACHA

Jakiś czas temu córka przyniosła ze szkoły następujące zadanie domowe:

Na dwóch izolowanych przewodzących kulach o promieniach 10 cm i 20 cm zgromadzono ładunki $-20 \mu\text{C}$ i $+50 \mu\text{C}$. Jakie ładunki Q_{10} i Q_{20} znajdują się na tych kulach po ich zetknięciu i ponownym rozdzieleniu?

Córka szybko uporała się z zadaniem zarabiając nazajutrz, zawsze mile widzianą, piątkę. Oto jej rozwiązanie.

1. Prawo zachowania ładunku: $Q_{10} + Q_{20} = (50 - 20) \mu\text{C} = 30 \mu\text{C}$.

2. Równość potencjałów kul: $\frac{Q_{10}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,1 \text{ m}} = \frac{Q_{20}}{4\pi\epsilon_0 \cdot 0,2 \text{ m}}$.

Odpowiedź: $Q_{10} = 10 \mu\text{C}$, $Q_{20} = 20 \mu\text{C}$.

Kiedy przeprowadziłem test wśród znajomych fizyków, większość ich takie właśnie rozwiązanie, bez namysłu, podawała. A przecież jest to rozwiązanie całkowicie błędne. Wzór na potencjał

kuli $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ obowiązuje, gdy:

- a) kula jest naładowana równomiernie,
- b) nie ma w jej pobliżu żadnych innych źródeł pola.

W naszym zadaniu żaden z tych warunków nie jest spełniony. Szczególnie komplikuje sprawę fakt nierównomiernego rozkładu ładunku na powierzchniach obu kul. Zjawisko indukowania pewnego rozkładu ładunku w przewodniku jest zawsze wspomniane w elementarnych kursach fizyki, ale prawie nigdy nie jest badane ilościowo ze względu na poważne problemy matematyczne, jakie się z tym wiążą. Wyznaczanie pola elektrycznego w obecności przewodników jest natomiast standardowym działem klasycznej fizyki teoretycznej.

W pewnych przypadkach — nasze zadanie do nich właśnie należy — to trudne na ogół zagadnienie można rozwiązać stosunkowo prosto. Jest tak wtedy, gdy działanie wyindukowanego w przewodniku ładunku da się zastąpić działaniem jednego lub pewnej liczby fikcyjnych ładunków punktowych. W dalszej części tego artykułu zbadamy oddziaływanie pojedynczego ładunku z przewodzącą płaszczyzną, następnie ze sferą i wreszcie opierając się na uzyskanych wynikach rozwiążemy problem podziału ładunku między dwie stykające się kule.

Niech półprzestrzeń $x < 0$ wypełniona będzie przewodnikiem (rys. 1). Gdy do powierzchni granicznej zbliżymy ładunek punktowy o wartości Q , jego pole elektryczne wywoła w przewodniku krótkotrwały prąd, który rozdzieli (dotychczas dokładnie wymieszane) ładunki dodatnie od ujemnych. Te rozdzielone ładunki utworzą dodatkowe pole zmniejszające płynący prąd, aż do ustalenia się stanu równowagi, w którym prąd już nie będzie płynął, a dodatkowe pole elektryczne przewodnika będzie ściśle kompensować (wewnątrz przewodnika) pole elektryczne ładunku zewnętrznego.

Wyindukowany ładunek występuje wyłącznie na powierzchni. Istotnie, gdybyśmy przypuścili, że wewnątrz przewodnika jest jakiś obszar o gęstości ładunku różnej od zera, to na mocy prawa Gaussa strumień pola przez powierzchnię, otaczającą ów obszar, musiałby też być różny od zera. Jest to jednak niemożliwe, skoro pole E jest tam (tzn. wewnątrz przewodnika) równe zeru, c.b.d.o.

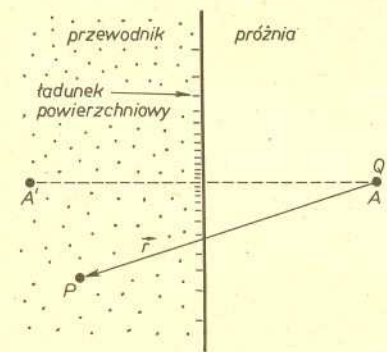
Oznaczając pole elektryczne wyindukowanego ładunku powierzchniowego E_i mamy dla $x < 0$, np. w punkcie P :

$$0 = E_i + \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

czyli

$$E_i = \frac{(-Q)r}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Jest to ważny przykład ładunku rozciągniętego wytwarzającego pole identyczne (w półprzestrzeni $x < 0$) z polem ładunku punktowego $-Q$ umieszczonego w początku wektora r . Ze względu na



Rys. 1



Rozwiązanie zadania M 467. Niech $a = m + n$ oznacza łączny kapitał, S_x — średnią długość gry przy założeniu, że pierwszy gracz ma kapitał początkowy x . Wtedy $S_0 = S_a = 0$. Rozpatrzmy sytuację po pierwszym rzucie monetą. Kapitał pierwszego gracza z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ wzrośnie o 1 i z takim samym prawdopodobieństwem zmaleje o 1. Dlatego dla $1 \leq x \leq a-1$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_{x-1} + 1) + \frac{1}{2}(S_{x+1} + 1),$$

skąd

$$2 S_x = S_{x-1} + S_{x+1} + 2.$$

Niech teraz $\Delta_l = S_l - S_{l-1}$ dla $l = 1, 2, \dots, a$. Mamy $\Delta_l - \Delta_{l-1} = -2$, czyli $\Delta_l = c - 2(l-1)$, natomiast $S_l = \Delta_l + \Delta_{l-1} + \dots + \Delta_1$ (ponieważ $S_0 = 0$), zatem

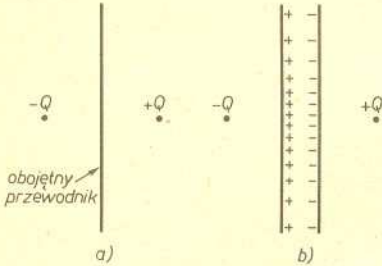
$$S_l = \frac{c + c - 2(l-1)}{2} \cdot l = (c+1-l) \cdot l.$$

Pozostaje wyznaczyć stałą c . Ale $S_a = (c+1-a) \cdot a = 0$, stąd $c+1 = a$. Ostatecznie $S_l = (a-l) \cdot l$, czyli $S_m = m \cdot n$.

symetrię jest jasne, że pole naszego *plaskiego* ładunku powierzchniowego, obserwowane w półprzestrzeni $x > 0$, jest też identyczne z polem ładunku $-Q$, ale umieszczonego tym razem w zwierciadlanym odbiciu punktu A . Ładunek $-Q$ w punkcie A' nazywa się ładunkiem-obrazem.

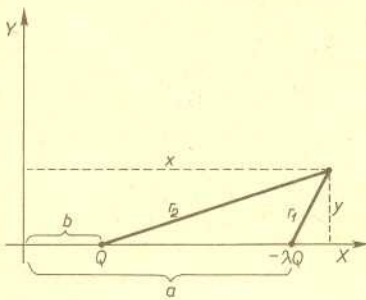
Zauważmy, że ogromna większość substancji przewodnika, którym tak rozrzućnie wypełniliśmy całą półprzestrzeń, nie jest w istocie do niczego potrzebna. Można usuwać dowolnie duże kawały neutralnego przeciwieństwa metalu (byle nie zaczepić o powierzchnię) nie zmieniając wartości pola ani dla $x < 0$, ani dla $x > 0$. Wystarczy, w istocie, wziąć cieką przewodzącą blachę i do niej zbliżyć ładunek, a wytworzone pole elektryczne będzie takie samo jak przy półprzestrzeni przewodzącej. Przewodząca płaszczyzna rozdziela przestrzeń na dwa rozłączne obszary. Jak się przekonaaliśmy, pole po jednej stronie nie zależy zupełnie od ładunków umieszczonych po stronie przeciwnej. Za to pole elektryczne po stronie ładunku uzupełnione jest dodatkowym polem ładunku indukowanego. W identyczny sposób można dowodzić ekranującego działania powierzchni przewodzącej obejmującej obszar skończony. Dla płaszczyzny wykazaliśmy ponadto, że ładunek wyindukowany równoważny jest po stronie źródła punktowemu ładunkowi-obrazowi umieszczonemu za ekranem.

Nim przejdziemy do badania zachowania powierzchni sferycznej, przeprowadźmy pewien eksperyment myślowy. Rozważmy układ dwóch identycznych ładunków przeciwnego znaku $+Q$ i $-Q$. Ładunki te wytwarzają pole elektryczne, które ma płaszczyznę ekwipotencjalną o potencjale zero. Zaczniemy cieką warstwę wokół tej powierzchni wypełniać przewodnikiem. Ponieważ wprowadzony przewodnik łączy punkty o jednakowym potencjale, nie popłynie po nim żaden prąd, nie zgromadzi się na nim żaden ładunek. Możemy naszym płaskim przewodnikiem rozciąć przestrzeń na dwie części nie wywołując żadnej zmiany pola elektrycznego (rys. 2a).



Rys. 2

Sytuacja przypomina bardzo tę poprzednio rozpatrywaną, ale teraz oba ładunki są rzeczywiste, a przewodnik nie wytwarza żadnego dodatkowego pola. Jeśli jednak uwzględnić pewną skończoną grubość przewodnika, to ponieważ jego wnętrze musi być wolne od pola, więc zgodnie z wcześniejszą analizą po obu jego stronach muszą wyindukować się odpowiednie ładunki ekranujące (rys. 2b). W symetrycznym położeniu źródeł zewnętrznych gęstości ładunków indukowanych po przeciwnych stronach są równe co do wartości bezwzględnej i dlatego ładunki te nie wytwarzają pola w otaczającej przestrzeni. Jeśli jednak zaczniemy przemieszczać względem przewodnika nabój $-Q$, to wystąpi zmiana gęstości powierzchniowej ładunku dodatniego, który go ekranuje, ale nie spowoduje to ani zmiany gęstości ładunku indukowanego po prawej stronie przewodnika, ani nie zmieni to pola w prawej półprzestrzeni. W szczególności, gdy ładunek $-Q$ doprowadzimy do samej powierzchni przewodzącej i pozwolimy mu zneutralizować się wzajemnie z ładunkiem indukowanym — dostaniemy dokładnie sytuację poprzednio rozpatrywaną. Zniknął ładunek rzeczywisty $-Q$, pozostało jednak po prawej stronie pole elektryczne, jakie on na początku wytwarzał!



Rys. 3

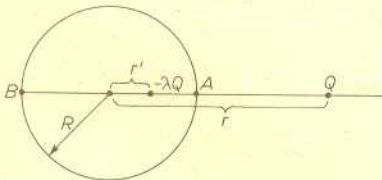
Rozpatrzmy teraz dwa ładunki przeciwnego znaku, ale o różnych wartościach bezwzględnych, np. Q i $-\lambda Q$, gdzie $0 < \lambda < 1$. Wyznamy miejsce geometryczne punktów, które są λ razy bliżej ładunku słabszego niż silniejszego. Będzie to oczywiście powierzchnia o potencjale zero.

Ponieważ układ ma symetrię obrotową, wystarczy rozpatrzeć przekrój szukanej powierzchni płaszczyzną rysunku (rys. 3). Warunek nasz: $\lambda r_2 = r_1$ po skorzystaniu z twierdzenia Pitagorasa przyjmie postać: $\sqrt{y^2 + (x-a)^2} = \lambda \sqrt{y^2 + (x-b)^2}$.

Równanie powyższe po podniesieniu do kwadratu przekształcamy do postaci:

$$(1 - \lambda^2) \left[x^2 + y^2 - \frac{1}{1 - \lambda^2} (2a - \lambda^2 \cdot 2b)x + \frac{1}{1 - \lambda^2} (a^2 - \lambda^2 b^2) \right] = 0,$$

z której odczytujemy, że szukaną krzywą jest okrąg o środku łączącym na osi x -ów (jest to tzw. okrąg Apoloniusza). Zamiast wyznaczyć teraz promień okręgu i jego położenie w zależności od λ i odległości między ładunkami, wygodniej jest przyjąć, że znamy R i r , a szukamy r' i λ (rys. 4). Z warunku zerowania potencjału w punktach A i B mamy

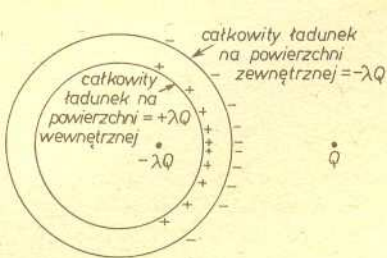


Rys. 4

$$\frac{\lambda Q}{R - r'} = \frac{Q}{r - R} \quad \text{oraz} \quad \frac{\lambda Q}{R + r'} = \frac{Q}{r + R}.$$

Rozwiązując ten układ dostajemy $\lambda = \frac{R}{r}$ oraz $r' = \frac{R^2}{r}$. W geometrii odwzorowanie

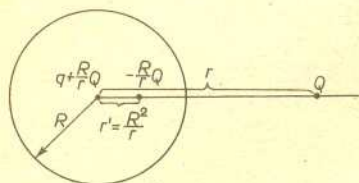
przeprowadzające punkt odległy o r (gdzie znajduje się ładunek Q) w jego obraz odległy o r' (gdzie znajduje się ładunek $-\lambda Q$) nosi nazwę inwersji (względem okręgu — jeśli rozważamy płaszczyznę, a względem sfery — jeśli rozważamy przestrzeń trójwymiarową).



Rys. 5

Jeśli zaczniemy teraz abstrakcyjną powierzchnię ekwipotencjalną pokrywać przewodnikiem, to podobnie jak poprzednio nie wpłynie to zupełnie na natężenie pola elektrycznego, ani wewnątrz, ani na zewnątrz utworzonej w ten sposób powłoki sferycznej. Jedynie w samym cienkim (lecz przecież w praktyce nie nieskończenie cienkim) obszarze, zajęтым przez przewodnik, wystąpi zmiana, gdyż tam pole musi być ekranowane i od ładunku $-\frac{R}{r}Q$, i od ładunku Q (rys. 5).

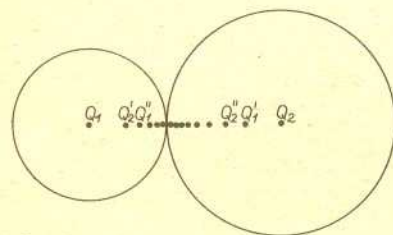
Podobnie jak w przypadku płaszczyzny i teraz można przesuwając ładunek wewnętrzny aż do jego zneutralizowania z ładunkiem indukowanym na powierzchni wewnętrznej, a pole elektryczne na zewnątrz pozostanie nie zmienione. Tym samym uzyskaliśmy rozwiązanie problemu elektrostatycznego kuli o całkowitym ładunku $-\lambda Q$, w pobliżu której znajduje się ładunek Q . Istnienie czy nieistnienie wewnątrz kuli miejsc nie wypełnionych przewodnikiem jest nieistotne. Jeśli na kulę wprowadzimy w tej sytuacji dodatkowy ładunek, to zgodnie z zasadą superpozycji możemy przyjąć, że rozłoży się on równomiernie na powierzchni kuli, a jego pole elektryczne będzie polem ładunku punktowego umieszczonego w środku (tak przecież się dzieje, gdy wprowadzimy ładunek na odosobnioną, nie naładowaną wcześniej kulę). Jeśli chcemy, by całkowity ładunek kuli wynosił q , musimy dodać ładunek $q + Q \frac{R}{r}$. Prowadzi to do



Rys. 6

następującej konfiguracji (rys. 6): Ładunek kuli wynosi q , ładunek zewnętrzny odległy o r równy jest Q — a wytworzone pole elektryczne jest polem trzech ładunków punktowych pokazanych na rysunku. Jasne jest, że umieściwszy na zewnątrz kuli N ładunków punktowych, pole elektryczne ładunku indukowanego opisałibyśmy przez $N+1$ fikcyjnych ładunków, z których jeden byłby w środku, a pozostałe w punktach uzyskanych przez inwersję położeń ładunków oryginalnych. Zauważmy ponadto, że potencjał kuli zależy tylko od ładunku umieszczonego w środku, a nie od rzeczywistego ładunku na kuli: $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left(q + \frac{QR}{r} \right)$.

Uzyskana sytuacja zaczyna przypominać nasz pierwotny problem. Gdyby zamiast ładunku Q była druga przewodząca kula, to poddana by ona była działaniu pola ładunków-obrazów pierwszej kuli i wytworzyłaby się w niej ładunki-obrazy, generujące z kolei nowe obrazy w pierwszej kuli. Ciąg ładunków-obrazów opisujący pole elektryczne każdej z kul będzie, rzecz jasna, nieskończony. Wyznamy położenia i wartości wszystkich tych ładunków.



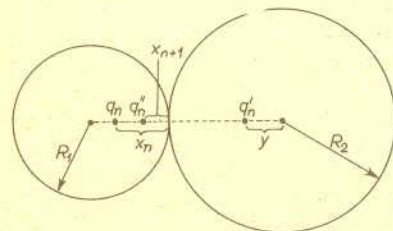
Rys. 7

Konstrukcję ciągu rozpoczniemy od umieszczenia w środkach kul ładunków Q_1 i Q_2 . Do tego musimy dodać obrazy tych ładunków, obrazy tych obrazów, obrazy obrazów tych obrazów, etc. Sytuacja w ten sposób uzyskana (rys. 7) jest w pełnej zgodzie ze znaną wcześniej konfiguracją z jednym ładunkiem zewnętrznym i z zasadą superpozycji. Zauważmy przede wszystkim, że na powierzchni kuli o promieniu R_1 pary ładunków $Q_2, Q_2'; Q_1'', Q_1'''; Q_2'', Q_2'''$; dają zerowy potencjał. Jedyny wkład do potencjału (oznacmy go V) da ładunek Q_1 . Stąd

$$Q_1 = 4\pi\epsilon_0 V R_1.$$

Analogicznie

$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 V R_2.$$



Rys. 8

Znamy pierwsze wyrazy ciągów — reguły znalezione dla inwersji pozwolą podać rekurencję wyrażającą wartości dalszych wyrazów przez poprzednie. Wystarczy skupić uwagę na ciągu $Q_1, Q_1', Q_1'' \dots$ (ciąg $Q_2, Q_2', Q_2'' \dots$ uzyskamy zamieniając w rozwiązaniu dla Q_1, \dots promienie R_1 i R_2 miejscami).

Oznaczmy dla wygody

$$Q_1 = q_1; Q_1' = q_2; Q_1'' = q_3, \dots \text{etc.}$$

Przyjmijmy, że ładunek q_n odległy jest od punktu styczności o x_n (rys. 8). Mamy

$$y = \frac{R_2^2}{R_2 + x_n}, \quad R_1 - x_{n+1} = \frac{R_1^2}{R_1 + R_2 - y}.$$

Eliminując y po prostych przekształceniach uzyskujemy relację:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_n} + 1.$$

Wielkości $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_n}$ tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy 1, a ponieważ znamy wartość tego wyrażenia dla $n = 1$ ($x_1 = R_1$), więc możemy od razu napisać wyraz ogólny:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{x_n} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} + n - 1,$$



Rozwiązanie zadania M 468. Nic. Pomalujmy drzewa na różowo i turkusowo tak, by sąsiednie drzewa były różnych kolorów. Zauważmy, że po skoku parzystość liczby wiewiórek na drzewach różowych i parzystość liczby wiewiórek na drzewach turkusowych nie ulegnie zmianie. Na początku liczby te to 5 i 5, a więc rozkład 10 i 0 nie może być nigdy osiągnięty.



Rozwiązanie zadania M 466. Rozpatrzmy punkty A i B na obwodzie wielokąta wybrane tak, by dzieliły jego obwód na połowy. Niech O będzie środkiem odcinka AB . Wtedy koło o środku O i średnicy a pokrywa wielokąt. Istotnie, weźmy dowolny punkt M na obwodzie wielokąta oraz punkt M' — obraz M przy symetrii środkowej względem O .

Mamy
 $OM \leq \frac{1}{2}(M'A + AM) = \frac{1}{2}(MB + AM) \leq \frac{1}{2}a$,
 zatem M leży w kole.
 Na zakończenie zauważmy, że jeśli $d < a$, to np. trójkąt o bokach $\frac{a+d}{2}$, $\frac{a+d}{2}$, $a-d$ nie mieści się w żadnym kole o średnicy d .

czyli

$$x_n = \frac{R_1 R_2}{R_2 + (n-1)(R_1 + R_2)}$$

Znając położenie ładunku q_n i stosując dwukrotnie wzór na wartość ładunku-obrazu możemy uzyskać wzór rekurencyjny (pomijam towarzyszące temu proste przekształcenia algebraiczne):

$$q_{n+1} = q_n \frac{R_2 + (n-1)(R_1 + R_2)}{R_2 + n(R_1 + R_2)}$$

czyli

$$q_{n+1} [R_2 + n(R_1 + R_2)] = q_n [R_2 + (n-1)(R_1 + R_2)] \equiv \text{const.}$$

Stałą wyznaczamy podstawiając $n = 1$ (bo znamy q_1) i dostajemy

$$q_n = 4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{\frac{R_2}{R_1 + R_2} + n - 1}$$

Ujemne ładunki-obrazy q'_n wynoszą:

$$q'_n = -\frac{R_2}{R_2 + x_n} \cdot q_n = -4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{n}$$

Oznaczając

$$\alpha_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{3}$$

możemy całkowite ładunki zgromadzone na kulach zapisać jako następujące szeregi:

$$Q_{10} = 4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha_2 + 1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{\alpha_2 + 2} - \frac{1}{1+2} + \dots \right)$$

$$Q_{20} = 4\pi\epsilon_0 V \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{\alpha_1 + 1} - \frac{1}{1+1} + \frac{1}{\alpha_1 + 2} - \frac{1}{1+2} + \dots \right)$$

Uzyskane szeregi są dość wolno zbieżne. Nie stanowi to problemu, gdy nie zależy nam na zbyt wielkiej dokładności lub jeśli dysponujemy komputerem. Jeśli jednak chwilowo nie mamy go pod ręką, możemy spróbować zsumować te szeregi analitycznie.

Zapisując ogólny wyraz szeregu jako całkę oznaczoną:

$$\frac{1}{\alpha + n} - \frac{1}{1 + n} = \int_0^1 x^{\alpha+n-1} dx - \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 x^n (x^{\alpha-1} - 1) dx$$

łatwo wykonamy sumowanie pojawiającego się postępu geometrycznego $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \right)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha + n} - \frac{1}{1 + n} \right) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - 1}{1-x} dx.$$

Po podstawieniu $x = y^3$ dla wartości $\alpha = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ dostajemy po prostych przekształceniach

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1} - 1}{1-x} dx = 3 \int_0^1 \frac{y + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dy = \frac{3}{2} \ln 3 \pm \sqrt{3} \frac{\pi}{6}$$

Daje to stosunek ładunków

$$\frac{Q_{20}}{Q_{10}} = \frac{3\sqrt{3} \ln 3 + \pi}{3\sqrt{3} \ln 3 - \pi} \approx 3,45,$$

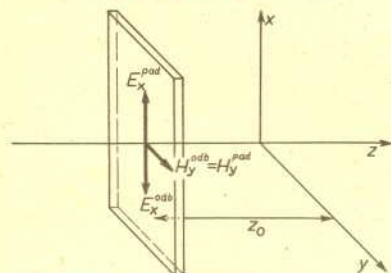
co w połączeniu z równaniem na sumę ładunków pozwala wreszcie obliczyć Q_{10} i Q_{20} :

$$Q_{10} = 6,75 \mu\text{C}, \quad Q_{20} = 23,25 \mu\text{C}.$$



Rozwiązanie zadania F 219. Na powierzchni przewodnika są spełnione następujące warunki dla składowych natężenia pola elektrycznego i magnetycznego

$$E_x^{\text{odb}} = -E_x^{\text{pad}} \text{ oraz } H_y^{\text{odb}} = H_y^{\text{pad}}$$



Na tej podstawie otrzymujemy

$$E_0 \cos\left(\frac{\omega}{c} z_0 - \omega t\right) = -E_0' \cos\left(-\frac{\omega'}{c} z_0 - \omega' t\right),$$

co daje

$$E_0 = -E_0' \quad \text{oraz}$$

$$(*) \quad \frac{\omega}{c} z_0 - \omega t = -\frac{\omega'}{c} z_0 - \omega' t,$$

gdzie z_0 jest aktualną współrzędną płyty odbijającej. Jeśli przyjmiemy, że w chwili początkowej płyta przechodziła przez początek układu współrzędnych, to wówczas położenie płyty, która porusza się ruchem jednostajnym, jest określone równaniem $z_0 = vt$. Wstawiając równanie na z_0 do (*) otrzymujemy

$$\omega \frac{v}{c} - \omega = -\omega' \frac{v}{c} - \omega',$$

skąd

$$\omega' = \omega \frac{1-v/c}{1+v/c},$$

a więc taką samą zmianę częstotliwości ν jak w przypadku zderzenia fotonu ze zwierciadłem (por. zadanie F 218 w tym numerze).

Ufffffrrrr ...