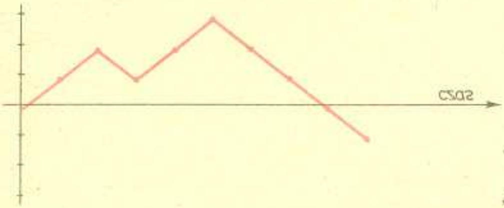
Naprawdę zabłądzić można dopiero w przestrzeni trójwymiarowej

Wyobraźmy sobie cząstkę, która może się poruszać tylko po prostej tak, iż w ciągu 1 sekundy ruchem jednostajnym przesuwa się o 1 w lewo lub o 1 w prawo z takim samym prawdopodobieństwem $\left(\text{równym } \frac{1}{2}\right)$. W chwili 0 cząstka znajdowała się w punkcie zero. W układzie współrzędnych wykresem ruchu cząstki będzie łamana (np. taka, jak na rysunku 1). Taki ruch nazywamy błądzeniem po prostej. Pytanie, na które chcemy znaleźć odpowiedź, brzmi: Jakie jest prawdopodobieństwo powrotu cząstki do punktu zero?



Rys. 1

Oznaczmy przez f_n prawdopodobieństwo powrotu cząstki do zera po raz pierwszy po $2n$ sekundach (powroty są możliwe tylko po parzystej liczbie sekund), przez u_n prawdopodobieństwo tego, że cząstka po $2n$ sekundach znajduje się w zerze. Zauważmy, że przy obliczaniu powyższych prawdopodobieństw możemy się ograniczyć do trajektorii o długości $2n$. Przyjmijmy, iż zdarzenie *cząstka powróci do zera* ma pewne prawdopodobieństwo f. Mamy wtedy

$$f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Zauważmy, że nie interesują nas liczby f_n, chcemy tylko znać ich sumę.

W zbiorze trajektorii o długości $2n$ wyróżnijmy trajektorie cząstek wracających po $2n$ sekundach do zera — zbiór A_n — oraz trajektorie cząstek wracających po raz pierwszy do zera po $2k$ sekundach — zbiory $B_k (k = 1, \ldots, n)$. Zauważmy, że zbiory B_k są parami rozłączne i $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. Tak więc ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A_n|B_k).$$

Zauważmy, że $P(A_n|B_k) = P(A_{n-k})$. Jeśli cząstka po $2k$ sekundach znalazła się w zerze, a po $2n$ sekundach ma tam powrócić, to jej trajektoria w czasie ostatnich $2n$—$2k$ sekund będzie taka jak cząstki startującej z zera i wracającej tam po $2(n-k)$ sekundach. Tak więc

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P(A_{n-k}).$$

Oczywiście $P(A_n) = u_n$ i $P(B_k) = f_k$.
Otrzymaliśmy ważny dla dalszych rozważań wzór

$$(*) \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot u_{n-k} \quad (n \geqslant 1).$$

Okazuje się, że między sumami $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ i $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$ zachodzi związek:
$f < 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u < +\infty$. Ponadto wtedy

$$f = 1 - \frac{1}{u}.$$

Oto dowód: Pomnóżmy $\sum_{k=1}^{n} f_k$ przez $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ i zgrupujmy razem iloczyny, w których suma wskaźników jest taka sama

$$(f_1 + \ldots + f_n)(u_0 + \ldots + u_{n-1}) = [f_1 \cdot u_0 + (f_1 \cdot u_1 + f_2 \cdot u_0) + (f_1 \cdot u_2 + f_2 \cdot u_1 + f_3 \cdot u_0) + \ldots + (f_1 \cdot u_{n-1} + \ldots + f_n \cdot u_0)] + \ldots + f_n \cdot u_{n-1}.$$

Zastępując wyrażenia w nawiasach okrągłych zgodnie z (*), pomijając wyrazy poza nawiasem kwadratowym i pamiętając, że $u_0 = 1$ mamy

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \sum_{k=0}^{n} u_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \sum_{k=0}^{n-1} u_k \geqslant \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - 1.$$

A zatem, jeśli $f < 1$ $\left(\text{a więc i } \sum_{k=1}^{n} f_k < 1\right)$, to

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{n} f_k}.$$

Ciąg po prawej stronie jest zbieżny, a ciąg po lewej jest niemalejący, a więc musi być też zbieżny, czyli $u < +\infty$.

Jeśli $u < +\infty$, to zsumujmy wyrażenia (*). Z lewej strony otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n - 1 = u - 1,$$

a z prawej

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot u_{n-k} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} u_n = f \cdot u.$$

(Taka zmiana kolejności sumowania jest dozwolona, gdyż wszystkie wyrazy są nieujemne.) Tak więc

$$f \cdot u = u - 1, \quad \text{czyli} \quad f = 1 - \frac{1}{u}.$$

W szczególności więc $f < 1$.

Prawdopodobieństwo u_n obliczyć jest łatwo. Aby cząstka po $2n$ sekundach znalazła się w zerze, musi wykonać n ruchów w lewo i tyleż w prawo — rozłożonych dowolnie w czasie. Tak więc $u_n = \binom{2n}{n} \cdot 2^{-2n}$. Skorzystajmy teraz ze wzoru Stirlinga podającego przybliżoną wartość $n!$ i obliczmy przybliżoną wartość u_n

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

$$u_n = 2^{-2n} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx 2^{-2n} \cdot \frac{(2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \sqrt{4n\pi}}{n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot 2n\pi} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}.$$

Dokładniej mamy:

$$n! = n^n \sqrt{2\pi n}\, e^{-n + \frac{\theta_n}{12n}}, \quad \text{gdzie } 0 \leqslant \theta_n \leqslant 1.$$

A zatem $u_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{\theta_{2n} - 4\theta_n}{24n}}$, czyli $\frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{1}{6n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{\frac{1}{24n}}$.

Tak więc $\dfrac{u_n - \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}{\frac{1}{\sqrt{\pi n}}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

Będziemy dalej oznaczać $a_n \approx n^s$, gdy mamy $\frac{a_n - n^s}{n^s} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$

Można sprawdzić, że gdy $a_n \approx n^s$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{n=1}^{\infty} n^s < \infty$.

Trzeba jeszcze wiedzieć, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = +\infty$, by stwierdzić, iż $f = 1$, czyli że z prawdopodobieństwem 1 cząstka wróci do zera.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n+k} \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2 \cdot 2^n} = +\infty$$

Inną sprawą jest, jak długo, średnio oczywiście, trzeba czekać na taki powrót. W tym celu trzeba by obliczyć

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot f_n.$$

Otóż można obliczyć, iż $f_n \approx \frac{1}{2n\sqrt{n\pi}}$, tak więc średni czas powrotu wynosi ... $+\infty$!.

W pewnym fantastyczno-naukowym opowiadaniu autor opisuje następujący sposób podróżowania w Kosmosie. Planety połączone są bramami (pod- czy nad- przestrzennymi — nie pamiętam dokładnie) w łańcuch tak, że wchodząc w bramę możemy z prawdopodobieństwem 1/2 znaleźć się na jednej z dwóch sąsiednich planet. Początkowo ludzie zupełnie nie wiedzą, jak sobie poradzić z takim systemem, jak wrócić, ale ktoś przypomina sobie o twierdzeniu, iż cząstka błądząca przypadkowo po prostej z prawdopodobieństwem 1 wraca do punktu wyjścia i podróżnicy wchodzą w bramy tak długo, aż znajdą się znów w punkcie startowym. Autor wiedział, że dzwonią, ale ... średnio podróżnicy wracaliby po nieskończonym czasie.

Zamiast ruchu cząstki na prostej można rozpatrywać ruch na płaszczyźnie (rys. 2) lub w przestrzeni (rys. 3). Cząstka startuje wtedy z punktu (0,0) lub (0, 0, 0). W ciągu sekundy przesuwa się z jednakowym prawdopodobieństwem $\left(\text{równym dla płaszczyzny } \frac{1}{4}, \text{ a dla przestrzeni } \frac{1}{6}\right)$ w lewo, w prawo, w przód lub w tył (w przestrzeni dochodzi jeszcze w górę lub w dół) o 1. Tak więc z punktu (x, y) może przejść do punktów $(x-1, y)$, $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x, y-1)$ (a z punktu (x, y, z) do $(x \pm 1, y, z)$, $(x, y \pm 1, z)$, $(x, y, z \pm 1)$). Zadajemy to samo pytanie co poprzednio: Z jakim prawdopodobieństwem cząstka powróci do początku układu?

Zauważmy, że jeśli f_n i u_n zdefiniujemy tak jak uprzednio, to wzór (*) pozostanie prawdziwy i dla płaszczyzny, i dla przestrzeni. Tak więc trzeba obliczyć u_n. Zacznijmy od płaszczyzny. Liczba trajektorii długości $2n$ jest równa 4^{2n}. Aby cząstka znalazła się w zerze po $2n$ sekundach, musi wykonać tyle ruchów w lewo, ile w prawo i tyle w przód, ile w tył. Jeśli więc ruszyła się w lewo k razy, to w prawo też k, w przód (i w tył) $n-k$ razy. Ruchy te mogła wykonać w dowolnej kolejności, więc liczba takich trajektorii jest równa

$$\frac{(2n)!}{(k!)^2 \cdot ((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{k}^2.$$

Ale k może przybierać wartości $0, 1, \ldots, n$, a więc

$$u_n = 4^{-2n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n} \cdot \binom{n}{k}^2 = 4^{-2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = 4^{-2n} \cdot \binom{2n}{n}^2.$$

$$\sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{k} \cdot a^j b^{2n-j} = (a+b)^{2n} = [(a+b)^n]^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k b^{n-k}\right)^2$$

Współczynnik przy $a^n b^n$ po prawej stronie równości wynosi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}$.

Korzystając ze wzoru Stirlinga mamy, iż $u_n \approx \frac{1}{\pi n}$ i znów z uwagi na rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n}$ mamy $f = 1$.

A jak jest w przestrzeni? Wyliczamy u_n analogicznie jak poprzednio i otrzymujemy

$$u_n = 6^{-2n} \cdot \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} \frac{(2n)!}{(i!)^2 (j!)^2 ((n-i-j)!)^2} =$$

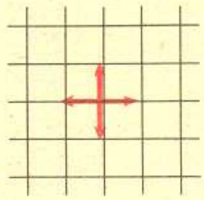
$$= 2^{-2n} \cdot \binom{2n}{n} \cdot \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} \left[3^{-n} \cdot \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!}\right]^2.$$

Wyrażenia $C^n_{ij} = \frac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!}$ są współczynnikami w rozwinięciu $(a+b+c)^n$, tj.

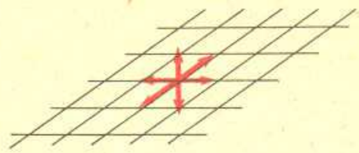
$$(a+b+c)^n = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} C^n_{ij} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

(Można to sprawdzić podobnie jak dla zwykłych współczynników Newtona w rozwinięciu $(a+b)^n$.) Podstawiając $a = b = c = 1$ mamy

$$1 = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} 3^{-n} C^n_{ij}.$$



Rys. 2



Rys. 3

Tak więc

$$\sum_{0 \leqslant i+j \leqslant n} [3^{-n} C^n_{ij}]^2 \leqslant \max_{0 \leqslant i+j \leqslant n} [3^{-n} C^n_{ij}].$$

Można sprawdzić, że największą wartość C^n_{ij} przyjmuje:

dla $i = j = \frac{n}{3}$ przy n podzielnym przez 3,

dla $i = j = \frac{n-1}{3}$ przy $n-1$ podzielnym przez 3,

dla $i = j = \frac{n+1}{3}$ przy $n+1$ podzielnym przez 3.

Za każdym razem mamy (znów ze wzoru Stirlinga)

$$\max_{0 \leqslant i+j \leqslant n} C^n_{ij} \cdot 3^{-n} \approx \frac{c}{n},$$

gdzie c jest stałą. Tak więc (c_1 jest znów stałą)

$$u_n \leqslant \frac{c_1}{n \cdot \sqrt{n}}.$$

Ale tym razem $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}}$ jest zbieżny, a więc $f < 1$!

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{(2^n+k) \cdot \sqrt{2^n+k}} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \sqrt{2^n}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n < +\infty$$

Przy dokładniejszych rachunkach można pokazać, że $f \approx 0{,}35$.

Opracował dr Jerzy RYLL