Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 137 /WT=3,26/ i 138 /WT=1,36/
z numeru 10/1986

Henryk Mikołajczak	- Wałbrzych	42,73pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	39,41pkt
Michał Marczak	- Radom	37,92pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	36,20pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	35,43pkt

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które desłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1987

Zadania z matematyki nr 149, 150

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

149. Niech b będzie średnią arytmetyczną długości wszystkich boków pewnego wielokąta wypukłego, a d — średnią arytmetyczną długości wszystkich przekątnych tego wielokąta. Dowieść, że $b < d$.

150. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d, spełniające warunki: $d > 0$, $c^2+a^2d < 4bd$. Wykazać, że wielomian $f(x) = x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie **150** przysłał pan Wojciech Boratyński z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1986

Przypominamy treść zadań:

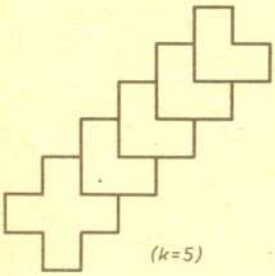
141. Obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, gdzie $a_n = \prod_{k=0}^{7} (n+k)^{-1}$.

142. Wyznaczyć liczby naturalne będące polami wielokątów ograniczonych łamanymi zamkniętymi bez samoprzecięć, o bokach długości 1, kolejno prostopadłych.

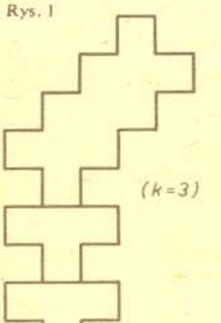
141. Oznaczmy $b_n = \prod_{k=0}^{6} (n+k)^{-1}$ i zauważmy, że $b_n < n^{-7}$ oraz $b_n - b_{n+1} =$

$$= \prod_{k=1}^{6} (n+k)^{-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+7}\right) = 7n^{-1}\Big(\prod_{k=1}^{6} (n+k)^{-1}\Big)(n+7)^{-1} = 7a_n. \text{ Stąd}$$

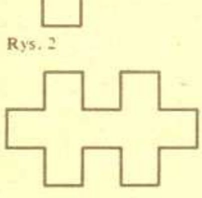
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{7}(b_1-b_2+b_2-b_3+b_3-b_4+\ \ldots) = \frac{1}{7}b_1 = \frac{1}{7\cdot 7!}.$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

142. Niech K oznacza krzyżyk złożony z 5 k. j. (kwadratów jednostkowych), a L oraz T — figury z 3 oraz 4 k. j., w kształcie liter L oraz T. Dla $k = 1, 2, 3, \ldots$ możemy z figury K oraz $k-1$ egzemplarzy figury L zbudować dopuszczalny (tj. spełniający warunki zadania) wielokąt W o polu $|W| = 3k+2$ (rysunek 1). Dołączając do niego jeden lub dwa egzemplarze figury T otrzymujemy wielokąty dopuszczalne o polach $3k+6$ i $3k+10$ (rysunek 2). Wyrazy tych trzech ciągów przyjmują wartości 5, 8, 9 oraz wszystkie wartości naturalne większe od 10. Oczywiście liczba 1 też jest polem dopuszczalnego wielokąta. Pokażemy, że pozostałe liczby naturalne, tj. 2, 3, 4, 6, 7, 10 — nie są.
Weźmy dowolny wielokąt dopuszczalny W. Niech n będzie największą długością prostokąta P o szerokości jednostkowej, o bokach równoległych do boków W, zawartego w W; nazwijmy dłuższe boki P poziomymi. Gdy $n \geqslant 6$, W zawiera $\geqslant 3$ k. j. w każdym z dwóch rzędów poziomych przyległych do P (bo inaczej brzeg W miałby bok długości > 1), a więc $|W| \geqslant 12$. Gdy $n = 5$, w każdym z tych rzędów W zawiera $\geqslant 2$ k. j.; jeśli 2, to muszą one przylegać do drugiego i czwartego segmentu prostokąta P; jeśli $\geqslant 3$, to w kolejnym rzędzie poziomym muszą być dalsze fragmenty W. Zatem albo W jest wielokątem z rysunku 3, albo $|W| > 5+2+3 = 10$. Gdy $n = 4$, W musi zawierać $\geqslant 2$ k. j. w każdym z rzędów przyległych do P i jeszcze $\geqslant 2$ k.j. w każdym z dwóch dalszych sąsiednich rzędów, tak, że $|W| \geqslant 12$. Gdy $n = 3$, W musi być wielokątem z rysunku 1 (dla pewnego k). Przypadek $n = 2$ jest niemożliwy, bo numerując „od dołu" kolejne rzędy kwadratów jednostkowych przecinające W widzimy, że w rzędzie drugim W ma $\geqslant 3$ kolejne k. j. Ostatecznie, możliwe wartości $|W|$ przebiegają zbiór $\{1, 5, 8, 9\} \cup \{x \in \mathbb{N} : x \geqslant 11\}$.

Zadania z fizyki nr 47, 48

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

47. Wolframowe włókno żaróweczki próżniowej ma przy nominalnym napięciu zasilającym 3,5 V temperaturę 2000 K. Jaka będzie temperatura włókna podczas zasilania żaróweczki napięciem 4,5 V? Przy jakim (orientacyjnie) napięciu nastąpi stopienie włókna? Można przyjąć, że wolfram w wysokiej temperaturze promieniuje jak ciało doskonale czarne. Opór właściwy wolframu jest w przybliżeniu proporcjonalny do $T^{1,2}$ (T — temperatura).
Temperatura topnienia wolframu wynosi 3650 K.

48. Posiadanie pary uszu ułatwia nam określenie kierunku, z którego dochodzi dany dźwięk. Stwierdzono, że dokładność, z jaką można ten kierunek wyznaczyć, zależy od częstotliwości dźwięku, przy czym w przedziale częstotliwości od 2 kHz do 5 kHz jest ona wyraźnie mniejsza, aniżeli dla częstotliwości niższych oraz wyższych. Jakie przyczyny fizyczne mogą być odpowiedzialne za to zjawisko?

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1986

Przypominamy treść zadań:

39. Na środku poziomej, podpartej na brzegach, sprężystej płyty umieszczono silnik. Stwierdzono przy tym, że płyta ugięła się w tym miejscu o 1 cm. Zakładając, że masa silnika jest dużo większa od masy płyty, obliczyć przybliżoną częstotliwość drgań rezonansowych silnika na tej płycie.

40. Jak zmienia się okres obiegu Ziemi wokół Słońca (rok gwiazdowy) na skutek wypromieniowania energii przez Słońce? Gęstość strumienia tej energii w odległości od Słońca, równej średniemu promieniowi orbity Ziemi, wynosi $1{,}4\cdot10^3$ W/m², pozostałe dane do obliczeń należy wziąć z tablic.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 35 /WT=2,20/ i 36 /WT=2,24/ z numeru 10/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	42,59pkt
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	40,68pkt
Aleksander Surma	- Myszków	37,16pkt
Anna Gluza	- Toruń	29,27pkt
Piotr Bała	- Toruń	24,84pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	24,12pkt
Robert Repucha	- Gołdap	23,00pkt
Zbigniew Galias	- Kraków	20,46pkt

39. Oznaczmy masę silnika przez m. Pod wpływem siły mg (g — przyspieszenie ziemskie) następuje ugięcie płyty o $x = 1$ cm. Przyjmując proporcjonalność ugięcia do działającej siły wyznaczamy odpowiednią stałą sprężystości $k = mg/x$. Częstotliwość f drgań rezonansowych obliczamy tak, jak dla ciężarka zawieszonego na sprężynie:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x}}$$

(widzimy, że częstotliwość ta jest taka sama, jak wahadła matematycznego o długości x). Po podstawieniu wartości mamy

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10}{0{,}01}}\ \mathrm{s^{-1}} \approx 5\ \mathrm{Hz}.$$

40. Orbitę Ziemi traktujemy jako kołową o promieniu r i wprowadzamy oznaczenia: M — masa Słońca, m — masa Ziemi, G — stała grawitacji, ω — prędkość kątowa Ziemi, T — okres obiegu Ziemi wokół Słońca. Ponieważ siła dośrodkowa utrzymująca Ziemię w ruchu po okręgu jest siłą przyciągania słonecznego, mamy $m\omega^2 r = GMm/r^2$. Z drugiej strony, niezależnie od zmian masy Słońca, zachowany jest moment pędu Ziemi względem Słońca: $m\omega r^2 = \mathrm{const}$. Z powyższych związków wynika zależność $\omega \sim M^2$, a stąd $T \sim 1/M^2$. Jak wiemy, zmiana długości roku jest bardzo mała. Z ostatniej zależności wynika więc

$$\frac{\Delta T}{T} = -2\frac{\Delta M}{M}, \tag{*}$$

gdzie ΔM jest zmianą masy Słońca w ciągu roku. Całkowita moc promieniowania słonecznego jest równa $L = 4\pi r^2 S$, gdzie $S = 1{,}4\cdot10^3$ W/m² (stała słoneczna). Energia wypromieniowana w ciągu roku wynosi zatem $E = LT$. Ze wzoru Einsteina wyznaczamy odpowiadający temu ubytek masy Słońca jako $|\Delta M| = E/c^2$ (c — prędkość światła).
Względna zmiana masy wynosi $\dfrac{\Delta M}{M} = -\dfrac{4\pi r^2 ST}{c^2 M}$.
Po podstawieniu wartości $c = 3{,}0\cdot10^8$ m/s, $T = 3{,}2\cdot10^7$ s, $r = 1{,}5\cdot10^{11}$ m, $M = 2{,}0\cdot10^{30}$ kg uzyskujemy $\Delta M/M = -0{,}65\cdot10^{-13}$. Na podstawie wzoru (*) znajdujemy teraz $\Delta T = 4\cdot10^{-6}$ s. Rok gwiazdowy ulega więc wydłużeniu o 4 μs rocznie.