Dla $n = 2, 3, \dots$ mamy wzory

$$\frac{(-1)^n}{n!} t_n = -t_1 - \sum_{k=2}^{n} A_k(x) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = -Q_{n-1} \sum_{k=2}^{n} B_k(x) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\, Q_{k-1}}.$$

Należy teraz zauważyć, że gdy ciąg $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to zbieżne są też szeregi

$$\sum_{k=2}^{n} \beta_k \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{i} \quad \sum_{k=2}^{n} \beta_k(x) \cdot \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\, Q_{k-1}};$$

z tego zaś wynika, że jeśli jeden z ciągów $(A_k(x))_{k=1}^{\infty}$, $(B_k(x))_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to zbieżny jest też ciąg $\left((-1)^k \frac{t_k}{k!}\right)_{k=2}^{\infty}$. Ze wzoru (*) wynika, że ciągi $(A_k(x))_{k=1}^{\infty}$ i $(B_k(x))_{k=1}^{\infty}$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne. Czyli, że $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$. Tymczasem dla ciągu $x_0 = ((-1)^n n!)_{n=1}^{\infty}$ mamy

$$x_0 \in \mathfrak{A}^* \quad \text{i} \quad A(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad B(x_0) = 1.$$

Zacytowany tutaj kontrprzykład zachwycić może swoją prostotą i elegancją. Należy też pamiętać o tym, że autorem jego był dziewiętnastoletni samouk. Stanisław Mazur opublikował powyższy kontrprzykład w jednym z czasopism niemieckich. Po pewnym czasie artykuł ten dotarł do Stefana Banacha, który polecił odszukać we Lwowie autora. W ten sposób doszło do pierwszego spotkania dwóch gigantów polskiej matematyki. Być może w kolejnym artykule napiszę, w co grywali w wolnych chwilach Stanisław Mazur i Stefan Banach.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 463. Udowodnić, że $\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2}$.
Rozwiązanie na str. 7

M 464. Niech $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, $S_n = X_1 + X_2 \dots + X_n$. Pokazać, że $Ee^{\lambda S_n} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2 n}$.
Rozwiązanie na str. 12

M 465. W Polsce rodzi się rocznie 700 tysięcy niemowląt. Załóżmy dla uproszczenia rachunków, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $\frac{1}{2}$. Oszacować możliwie najlepiej prawdopodobieństwo tego, że liczba chłopców przewyższy liczbę dziewcząt o 7 tysięcy lub więcej.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 216. W wyniku oddziaływań elektromagnetycznych cząstek o przeciwnych ładunkach elektrycznych (np. elektronu e^- i pozytonu e^+ lub pionów π^+ i π^-) może powstawać związany układ tych cząstek tworząc rodzaj atomu. Opierając się na modelu atomu Bohra znaleźć:
a) Wartość energii stanu podstawowego pozytonium, tj. atomu powstałego z e^- i e^+.
b) Energię kwantu γ wypromieniowanego przy przejściu pionium, tj. układu π^- i π^+, ze stanu wzbudzonego o $n = 2$ do stanu podstawowego ($n = 1$). Oszacować rozmiary pionium i pozytonium w stanie podstawowym. Masa elektronu i pozytonu jest taka sama i wynosi $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-21}$ g; masy pionów π^+ i π^- przyjąć należy za równe i wynoszące $m_\pi \approx 273{,}1 \cdot m_e$; ładunek elektronu $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.
Rozwiązanie na str. 13

F 217. Egzotyczne atomy omówione w poprzednim zadaniu są nietrwałe. Np. pozytonium rozpada się po krótkim czasie na skutek anihilacji elektronu i pozytonu. Ile co najmniej kwantów γ powstanie w wyniku tego procesu? Czy energia ich będzie wystarczająca do kreacji nowej pary elektron-pozyton?
Rozwiązanie na str. 7