O pewnych własnościach przestrzeni euklidesowych

Piotr JĘDRZEJEWICZ

Autor, który jest zdobywcą złotego medalu w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1986 roku, przedstawia skrót nagrodzonej pracy.

Artykuł stanowi omówienie pracy poświęconej próbie aksjomatyzacji wielowymiarowej geometrii euklidesowej. Pomysł napisania tej pracy zrodził się po lekturze *Geometrii elementarnej* A. W. Pogorielowa. W pracy ograniczamy się do zbadania takich pojęć, jak wymiar, równoległość, prostopadłość. Aby wskazać, że definicje przyjęte w pracy są naturalne, ilustrujemy uzyskane twierdzenia przykładami z trójwymiarowej geometrii euklidesowej.

Zanim wypiszemy przyjęte w pracy aksjomaty, zróbmy następującą uwagę. Rozważając trójwymiarową geometrię euklidesową przyjmuje się jako pojęcia pierwotne m.in. punkty, proste i płaszczyzny, z których każde, jako uniwersum dla geometrii euklidesowej niższego wymiaru ma analogiczne własności. Myśl tę rozszerzamy również na przypadek przestrzeni euklidesowych wyższych wymiarów. Symbolem E^n dla $n = -1, 0, 1, 2, 3...$ (E^{-1} — zbiór pusty, E^0 — punkt, E^1 — prosta, E^2 — płaszczyzna euklidesowa, E^3 — trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa) będziemy oznaczać n-wymiarowe przestrzenie euklidesowe, które zamiennie nazywać będziemy n-przestrzeniami lub po prostu przestrzeniami.

Punktem wyjścia do naszych rozważań jest następujący układ aksjomatów.

I Dla każdej przestrzeni istnieje punkt nie należący do niej.

II Częścią wspólną dwóch przestrzeni jest przestrzeń.

III Jeśli $E^k = E^l$, to $k = l$. Jeśli $E^k \subset E^l$ i $E^k \neq E^l$, to $k < l$.

IV Dla dowolnych $n+1$ punktów nie będących równocześnie elementami tej samej $(n-1)$-przestrzeni istnieje dokładnie jedna przestrzeń zawierająca te punkty.

V Dla dowolnej n-przestrzeni i każdego $m \geqslant n$ istnieje m-przestrzeń zawierająca tę n-przestrzeń.

VI Jeśli $E^n \subset E^{n+1}$, to E^{n+1} jest sumą E^n i dwóch, rozłącznych i rozłącznych z E^n, $(n+1)$-półprzestrzeni otwartych, takich, że odcinek o końcach należących do jednej $(n+1)$-półprzestrzeni nie ma punktów wspólnych z E^n, a odcinek o końcach w dwóch $(n+1)$-półprzestrzeniach ma punkt wspólny z $E^n (n \geqslant 0)$.

Powyższy układ aksjomatów nie był badany pod kątem niezależności. W gruncie rzeczy jego cechą jest duża naturalność, zgodność z intuicją. W efekcie rozważań o charakterze wyłącznie czystej dedukcji uzyskuje się pewną liczbę twierdzeń, z których przytaczamy jedynie najważniejsze.

Uwieńczeniem pierwszej części dotyczącej własności wymiaru jest

Twierdzenie. Jeśli k-przestrzeń i l-przestrzeń generują m-przestrzeń, a przekrojem ich jest w-przestrzeń ($w \geqslant 0$), to $m+w = k+l$.

Użyte wyżej pojęcie generowania przestrzeni przez zbiór określamy następująco.

Definicja. Zbiór X generuje przestrzeń, jeśli jest to n-przestrzeń zawierająca zbiór X oraz nie istnieje $(n-1)$-przestrzeń zawierająca ten zbiór. Przestrzeń generowaną przez zbiór X oznaczamy symbolem $\langle X \rangle$.

W drugiej części pracy omówione jest pojęcie równoległości przestrzeni.

Definicja. k-przestrzeń i l-przestrzeń, gdy $k \leqslant l$, nazywamy rozłącznie równoległymi, jeśli są rozłączne i leżą w $(l+1)$-przestrzeni ($k \geqslant 0$).

Definicja. k-przestrzeń i l-przestrzeń nazywamy równoległymi, jeśli są rozłącznie równoległe lub jedna zawarta jest w drugiej ($k, l \geqslant 0$). Jeśli E^k i E^l są równoległe, to piszemy $E^k \parallel E^l$.

Wiadomo, że do każdej płaszczyzny przez dowolny punkt można poprowadzić płaszczyznę równoległą i przy tym dokładnie jedną. W naszym przypadku zachodzi twierdzenie ogólniejsze.

Twierdzenie. Do każdej n-przestrzeni przez dowolny punkt można poprowadzić n-przestrzeń równoległą i przy tym dokładnie jedną ($n \geqslant 0$).

Dalsze udowodnione w pracy własności relacji równoległości przedstawiają się następująco.

Twierdzenie. Jeśli $E^k \| E^l$, $E^l \| E^m$, $k \leqslant l \leqslant m$, to $E^k \| E^m$.

Rozwiązanie zadania M 465. Skorzystamy z wyniku poprzedniego zadania. Niech $X_i = 1$, gdy i-te niemowlę jest chłopcem, w przeciwnym razie $X_i = -1$. Mamy oszacować $P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \delta\right)$, gdzie $n = 700\,000$, $\delta = \frac{1}{100}$.

Przypomnijmy nierówność Czebyszewa: jeśli $X \geqslant 0$, to $P(X \geqslant \delta) \leqslant \frac{EX}{\delta}$.

Zastosujemy ją do zmiennej losowej $e^{\lambda S_n}$, gdzie $\lambda > 0$.

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \delta\right) = P(S_n \geqslant n\delta) =$$

$$= P(e^{\lambda S_n} \geqslant e^{\lambda n\delta}) \leqslant \frac{Ee^{\lambda S_n}}{e^{\lambda n\delta}},$$

co na mocy poprzedniego zadania nie przekracza $e^{\frac{1}{2}\lambda^2 n - \lambda n\delta}$.

Funkcja $f(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 n - \lambda n\delta$ ma minimum dla $\lambda = \delta$, i ostatecznie

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \delta\right) \leqslant e^{-\frac{1}{2}\delta^2 n}.$$

Dla $n = 700\,000$ i $\delta = \frac{1}{100}$ badane prawdopodobieństwo nie przekracza $e^{-35} < 7 \cdot 10^{-16}$. Pouczające jest porównanie z oszacowaniem przez $\frac{1}{560}$, otrzymanym za pomocą jednej ze standardowych wersji nierówności Czebyszewa.

Rozwiązanie zadania M 463. Z rozwinięcia funkcji e^x w szereg potęgowy mamy

$$\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} = 1+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^4}{4!}+\ldots+\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

zarazem

$$e^{\frac{1}{2}\lambda^2} = 1+\frac{\lambda^2}{2^1\cdot 1!}+\frac{\lambda^4}{2^2\cdot 2!}+\ldots+\frac{\lambda^{2n}}{2^n\cdot n!}+\ldots$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy zauważyć, że $(2n)! \geqslant 2^n\cdot n!$.

Rozwiązanie zadania F 217. W procesie anihilacji muszą być spełnione m.in. zasady zachowania energii i pędu. Ponieważ energia kinetyczna elektronu i pozytonu jest bardzo mała w porównaniu z energią spoczynkową ($m_e c^2 = 0{,}511$ MeV), to możemy ją zaniedbać (c jest prędkością światła).
Całkowity pęd anihilujących cząstek jest równy zeru. Ponieważ pęd musi być zachowany, w wyniku anihilacji nie może powstać jeden foton, pęd fotonu jest bowiem zawsze większy od zera. Zasada zachowania pędu będzie spełniona, jeśli powstaną dwa fotony o przeciwnych pędach.
Zasada zachowania energii ma postać

$$2m_e c^2 = 2h\nu.$$

Zatem żaden z kwantów γ nie może mieć energii większej od $m_e c^2$. Tymczasem na mocy zasady zachowania energii dla procesu kreacji par elektronowo-pozytonowych mamy

$$E_\gamma = 2m_e c^2 + E_k,$$

gdzie E_k jest energią kinetyczną powstałych cząstek, a E_γ — energią kwantu wytwarzającego parę. Ponieważ E_γ jest mniejsze od $m_e c^2$, zatem kreacja pary jest niemożliwa.

Twierdzenie. Jeśli $\langle E^k \cup E^l\rangle = E^m$, $E^k\cap E^l = E^w$, $w \geqslant 0$, $E_1^k || E^k$, $E_1^l || E^l$, $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$, to istnieją takie E_1^m i E_1^w, że $\langle E_1^k \cup E_1^l\rangle = E_1^m$, $E_1^k \cap E_1^l = E_1^w$, $E_1^m || E^m$ i $E_1^w || E^w$.

W najprostszej swej nietrywialnej postaci $k = l = 1$, $m = 2$, $w = 0$, fakt ten oznacza, że jeśli mamy parę prostych przecinających się i przez punkt poprowadzimy do nich równoległe, to wyznaczą one płaszczyznę równoległą. Warunek $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$ można zastąpić przez $E_1^k, E_1^l \subset E^m$.

Twierdzenie. Jeśli $E^k || E^m$, $E^k || E^n$, $E^m \cap E^n = E^l$, to $E^k || E^l$.

Weźmy prostą równoległą do dwóch przecinających się płaszczyzn. Twierdzenie powyższe orzeka, że prosta jest równoległa do krawędzi przecięcia tych płaszczyzn.

Twierdzenie. Jeśli przestrzeń przecina dwie przestrzenie równoległe, to te przekroje są przestrzeniami równoległymi.

Przecięcie płaszczyzną dwóch płaszczyzn równoległych tworzy dwie proste równoległe.

Twierdzenie. Dwie dowolne n-przestrzenie leżą w równoległych $2n$-przestrzeniach ($n \geqslant 0$).

Dwie dowolne proste leżą w płaszczyznach równoległych.

W trzeciej części pracy przedstawione są podstawowe własności relacji prostopadłości przestrzeni.

Definicja. Prostą i n-przestrzeń nazywamy prostopadłymi, jeśli ich przekrojem jest punkt i prosta ta jest prostopadła do każdej z n prostych przechodzących przez ten punkt i takich, że ich suma generuje tę n-przestrzeń ($n \geqslant 1$).

Definicja. k-przestrzeń i l-przestrzeń, gdy $k \leqslant l$, nazywamy ściśle prostopadłymi, jeśli się przecinają na $(k-1)$-przestrzeni i istnieje prosta zawarta w k-przestrzeni, prostopadła do l-przestrzeni ($k \geqslant 1$).

Definicja. k-przestrzeń i l-przestrzeń nazywamy pękowo prostopadłymi, jeśli ich przekrojem jest punkt i każda z k prostych, które generują k-przestrzeń, jest prostopadła do każdej z l prostych, które generują l-przestrzeń ($k, l \geqslant 1$).

Prostopadłość ścisłą oznaczamy $\perp$, a pękową $\top$.

Definicja ta jest poprawna, nie zależy od wyboru układów prostych generujących dane przestrzenie, na mocy następującego faktu.

Twierdzenie. Jeśli prosta jest prostopadła do przestrzeni, to jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej przestrzeni i przechodzącej przez jej punkt przecięcia z tą przestrzenią.

W przypadku trójwymiarowym stwierdzenie to oznacza, że jeśli prosta jest prostopadła do dwóch prostych zawartych w płaszczyźnie i przechodzących przez jej punkt przecięcia z tą płaszczyzną, to jest prostopadła do każdej prostej przechodzącej przez ten punkt i leżącej w tej płaszczyźnie.

A oto ważniejsze własności prostopadłości udowodnione w pracy.

Twierdzenie. Dla dowolnej przestrzeni E^k przez dowolny punkt $A \in E^k$ można w E^{k+1} zawierającej E^k poprowadzić E^l pękowo prostopadłą do E^k i przy tym dokładnie jedną ($k, l \geqslant 0$).

Twierdzenie. Jeśli $E^k \perp E^l$, $E_1^k || E^k$, $E_1^l || E^l$, $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$, to $E_1^k \perp E_1^l$.

Twierdzenie. Jeśli $E^k \top E^l$, $E_1^k || E^k$, $E_1^l || E^l$, $E_1^k \cap E_1^l \neq \emptyset$, to $E_1^k \top E_1^l$.

Twierdzenie. Jeśli $E^k \top E^l$, $E_1^k \top E^l$, $E^k, E_1^k, E^l \subset E^{k+l}$, to $E^k || E_1^k$.

Interpretacja powyższych twierdzeń w trójwymiarowej geometrii euklidesowej jest oczywista. Zwróćmy uwagę, że ostatnia z tych własności nie ma swego odpowiednika w przypadku prostopadłości ścisłej (rozważmy np. płaszczyznę i dwie przecinające się płaszczyzny do niej prostopadłe).

Na zakończenie przytoczymy ostatnie (sześćdziesiąte czwarte) udowodnione w pracy twierdzenie.

Z każdego punktu do każdej przestrzeni (E^n, gdzie $n \geqslant 1$) nie zawierającej tego punktu można poprowadzić prostą prostopadłą i przy tym dokładnie jedną.

Fakt ten stwarza możliwość określenia odległości punktu od przestrzeni. Pojęcie to może stanowić początek badań własności metrycznych E^n.