Dr Zbigniew SAWOŃ

Pewien kontrprzykład skonstruowany przez Stanisława Mazura

W listopadzie ubiegłego roku minęła piąta rocznica śmierci Stanisława Mazura, który był moim wielkim mistrzem. Pamiętając o tym pozwolę sobie przypomnieć jego pierwszą publikację, która stała się przyczyną długotrwałej i owocnej współpracy ze Stefanem Banachem.

Zacznę od paru definicji:

Niech $\mathfrak{A} = (a_{n,k})_{n,k} = 1, 2, \ldots$ będzie nieskończoną macierzą o wyrazach rzeczywistych spełniającą następujące warunki

1) $a_{n,k} \geqslant 0$, $a_{n,n} \neq 0$, $a_{n,k} = 0$ dla $k = n+1, n+2, \ldots$,

2) dla każdego k mamy $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,k} = 0$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k} = 1$.

Mówimy, że ciąg $x = (t_n)_{n=1}^{\infty}$ jest limesowalny macierzą $\mathfrak{A}$, jeśli istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k}t_k$.

Wówczas

(i) liczbę $A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k}t_k$ nazywamy n-tą transformatą ciągu x wyznaczoną przez macierz $\mathfrak{A}$,

(ii) liczbę $A(x) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)$ nazywamy uogólnioną granicą ciągu x wyznaczoną przez macierz $\mathfrak{A}$,

(iii) zbiór $\mathfrak{A}^* = \{x = (t_k)_{k=1}^{\infty} :$ istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} A_n(x)\}$ nazywamy polem metody limesowalności wyznaczonej przez macierz $\mathfrak{A}$.

Warunki 1, 2 i 3 zapewniają, że wszystkie ciągi zbieżne leżą w polu metody $\mathfrak{A}$ i że granica uogólniona dla ciągu zbieżnego jest równa jego zwykłej granicy. Aby Czytelnik mógł się o tym przekonać, odsyłam go do mojego artykułu „Metoda wędrującego garbu", zamieszczonego w ósmym numerze zeszłorocznej *Delty*.

Przykładem metody limesowalności jest metoda wyznaczona przez macierz:

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{dla } k > n. \end{cases}$$

Wówczas dla każdego ciągu $x = (t_k)_{k=1}^{\infty}$

$$A_n(x) = \frac{t_1 + t_2 \ldots + t_n}{n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Jednym z podstawowych problemów teorii limesowalności w początkowym stadium jej rozwoju był problem sformułowany przez Hugona Steinhausa:

Niech $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ będą dwiema macierzami spełniającymi warunki 1, 2, 3. Przypuśćmy ponadto, że $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$. Czy dla każdego $x \in \mathfrak{A}^*$ musi być $A(x) = B(x)$? Inaczej mówiąc, czy jeśli dwie metody limesowalności mają jednakowe pole („uzbieżniają" te same ciągi), to uogólnione granice są takie same? Problem ten rozwiązał Stanisław Mazur i odpowiedź jest negatywna. Prostota podanego przez niego kontrprzykładu pozwala na przedstawienie go na łamach *Delty*.

Zamiast wypisywać macierze $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ wypiszmy od razu transformaty odpowiadające tym macierzom, prosząc jednocześnie Czytelnika, aby za autora wypełnił tę lukę

$$A_1(x) = B_1(x) = t_1,$$

$$A_n(x) = t_{n-1} + \frac{1}{n}t_n, \quad B_n(x) = \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)t_{n-1} + \frac{1}{n}t_n \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Zatem

$$(*) \qquad B_n(x) = A_n(x) + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}t_{n-1} \quad \text{dla } n = 2, 3, \ldots$$

Oznaczmy:

$$Q_1 = 1; \; Q_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{k!}\right) \quad \text{dla } n = 2, 3, \ldots$$

Czytelnik z łatwością udowodni, że ciąg Q_n jest zbieżny i że jego granica jest liczbą dodatnią.

Oczywiście Czytelnik bez trudu zauważy, że przedstawioną konstrukcję można uogólnić biorąc zamiast ciągu $\varrho_n = \frac{1}{n}$ dowolny ciąg $\varrho_n \to 0$, $\varrho_n > 0$. Tak też wyglądała w oryginale praca St. Mazura. Wybrałem jednak jeden konkretny ciąg oczekując, że uważny Czytelnik bez trudu uchwyci ideę tego pomysłu i potrafi ją zaadaptować do przypadku ogólnego.

Dla $n = 2, 3, \ldots$ mamy wzory

$$\frac{(-1)^n}{n!}t_n = -t_1 - \sum_{k=2}^{n} A_k(x)\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} = -Q_{n-1}\sum_{k=2}^{n} B_k(x)\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,Q_{k-1}}.$$

Należy teraz zauważyć, że gdy ciąg $(\beta_k)_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to zbieżne są też szeregi

$$\sum_{k=2}^{n}\beta_k\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{i} \quad \sum_{k=2}^{n}\beta_k(x)\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!\,Q_{k-1}};$$

z tego zaś wynika, że jeśli jeden z ciągów $(A_k(x))_{k=1}^{\infty}$, $(B_k(x))_{k=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to zbieżny jest też ciąg $\left((-1)^k\frac{t_k}{k!}\right)_{k=2}^{\infty}$. Ze wzoru (*) wynika, że ciągi $(A_k(x))_{k=1}^{\infty}$ i $(B_k(x))_{k=1}^{\infty}$ są jednocześnie zbieżne lub rozbieżne. Czyli, że $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$. Tymczasem dla ciągu $x_0 = ((-1)^n n!)_{n=1}^{\infty}$ mamy

$$x_0 \in \mathfrak{A}^* \quad \text{i} \quad A(x_0) = 0 \quad \text{oraz} \quad B(x_0) = 1.$$

Zacytowany tutaj kontrprzykład zachwycić może swoją prostotą i elegancją. Należy też pamiętać o tym, że autorem jego był dziewiętnastoletni samouk. Stanisław Mazur opublikował powyższy kontrprzykład w jednym z czasopism niemieckich. Po pewnym czasie artykuł ten dotarł do Stefana Banacha, który polecił odszukać we Lwowie autora. W ten sposób doszło do pierwszego spotkania dwóch gigantów polskiej matematyki. Być może w kolejnym artykule napiszę, w co grywali w wolnych chwilach Stanisław Mazur i Stefan Banach.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 463. Udowodnić, że $\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2}$.
Rozwiązanie na str. 7

M 464. Niech $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$, $S_n = X_1 + X_2 \ldots + X_n$. Pokazać, że $\mathrm{E}e^{\lambda S_n} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2 n}$.
Rozwiązanie na str. 12

M 465. W Polsce rodzi się rocznie 700 tysięcy niemowląt. Załóżmy dla uproszczenia rachunków, że prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $\frac{1}{2}$. Oszacować możliwie najlepiej prawdopodobieństwo tego, że liczba chłopców przewyższy liczbę dziewcząt o 7 tysięcy lub więcej.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI

F 216. W wyniku oddziaływań elektromagnetycznych cząstek o przeciwnych ładunkach elektrycznych (np. elektronu e^- i pozytonu e^+ lub pionów π^+ i π^-) może powstawać związany układ tych cząstek tworząc rodzaj atomu. Opierając się na modelu atomu Bohra znaleźć:
a) Wartość energii stanu podstawowego pozytonium, tj. atomu powstałego z e^- i e^+.
b) Energię kwantu γ wypromieniowanego przy przejściu pionium, tj. układu π^- i π^+, ze stanu wzbudzonego o $n = 2$ do stanu podstawowego ($n = 1$). Oszacować rozmiary pionium i pozytonium w stanie podstawowym. Masa elektronu i pozytonu jest taka sama i wynosi $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-21}$ g; masy pionów π^+ i π^- przyjąć należy za równe i wynoszące $m_\pi \approx 273{,}1\cdot m_e$; ładunek elektronu $e \approx 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.
Rozwiązanie na str. 13

F 217. Egzotyczne atomy omówione w poprzednim zadaniu są nietrwałe. Np. pozytonium rozpada się po krótkim czasie na skutek anihilacji elektronu i pozytonu. Ile co najmniej kwantów γ powstanie w wyniku tego procesu? Czy energia ich będzie wystarczająca do kreacji nowej pary elektron-pozyton?
Rozwiązanie na str. 7