Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1987

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 135 /WT=2,27/ i 136 /WT=1,12/
z numeru 9/1986

Marek Prauza	- Poraj	46,74pkt
Jerzy Mikuta	- Zielona G.	46,17pkt
Henryk Mikołajczak	- Wałbrzych	41,64pkt
Zbigniew Zaus	- Kraków	38,05pkt
Michał Marczak	- Radom	36,56pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	35,43pkt

Panowie Prauza i Mikuta - obaj już po raz drugi.

Zadania z matematyki nr 147, 148

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

147. Dany jest ściśle rosnący ciąg (x_n), którego wyrazami są liczby naturalne. Niech z_n będzie najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb $x_1, \ldots, x_n$. Czy szereg $\sum 1/z_n$ musi być zbieżny?

148. Niech P będzie punktem wewnętrznym wielościanu wypukłego W spełniającego następujący warunek: (*) z każdego wierzchołka wychodzą dokładnie 3 krawędzie. Załóżmy, że w szkielet każdego ostrosłupa, którego podstawą jest dowolna ściana wielościanu W, a pozostałym wierzchołkiem — punkt P, można wpisać kulę. Dowieść, że w szkielet wielościanu W można wpisać kulę. (Kula wpisana w szkielet wielościanu to kula styczna do wszystkich jego krawędzi.)

Zadanie **148** przysłał pan Henryk Kornacki z Augustowa stawiając przy tym pytanie (które przekazujemy Czytelnikom poza konkursem): czy twierdzenie jest prawdziwe bez założenia (*)?

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1986

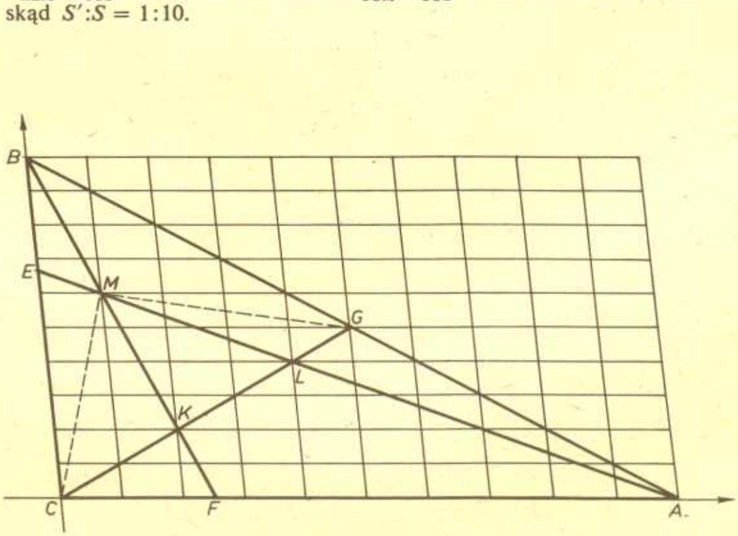
Przypominamy treść zadań:

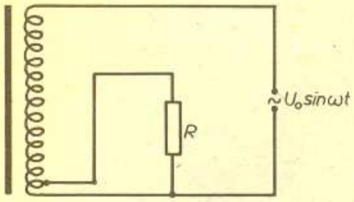
139. Dane są ciągi nieskończone liczb naturalnych (x_i), (y_i), (z_i). Dowieść, że $x_p \leq x_q$, $y_p \leq y_q$, $z_p \leq z_q$ dla pewnej pary numerów p, q.

140. Dany jest trójkąt ABC; $S_{ABC} = S$. Niech $E \in \overline{BC}$, $F \in \overline{CA}$, $G \in \overline{AB}$, $AG = GB$, $2BE = EC$, $3CF = FA$; $\mathrm{pr}BF \cap \mathrm{pr}CG = \{K\}$, $\mathrm{pr}CG \cap \mathrm{pr}AE = \{L\}$, $\mathrm{pr}AE \cap \mathrm{pr}BF = \{M\}$; $S_{KLM} = S'$. Obliczyć S'/S.

139. Jeśli ciąg o wyrazach naturalnych jest ograniczony z góry, to ma podciąg stały; jeśli jest nieograniczony z góry, to ma podciąg rosnący. W każdym przypadku ma więc podciąg niemalejący. Z ciągu $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg niemalejący $(x_{i_j})_{j=1}^{\infty}$. Z ciągu $(y_{i_j})_{j=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg niemalejący $(y_{i_{j_k}})_{k=1}^{\infty}$. Z ciągu $(z_{i_{j_k}})_{k=1}^{\infty}$ wybieramy podciąg niemalejący $(z_{i_{j_{k_l}}})_{l=1}^{\infty}$. Przyjmując na przykład $p = i_{j_{k_5}}$, $q = i_{j_{k_8}}$ dostajemy żądane nierówności.

140. Wprowadźmy na płaszczyźnie ukośnokątny układ współrzędnych tak, by $A = (10,0)$, $B = (0,10)$, $C = (0,0)$. Wówczas $K = (2,2)$, $L = (4,4)$, $M = (1,6)$ (rysunek). Zachodzą proporcje $S_{KLM} : S_{CGS} = KL : CG = 2:5$ oraz $S_{CGM} : S_{CGB} = KM : KB = 1:2$ i wreszcie $S_{CGB} : S_{ABC} = 1:2$, skąd $S' : S = 1:10$.





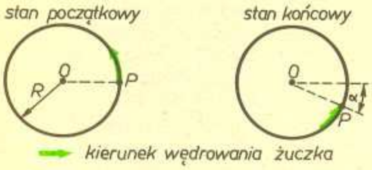
Rys. 1

Zadania z fizyki nr 45, 46

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

45. Rysunek 1 przedstawia obwód autotransformatora o bardzo dużej liczbie zwojów n ($n > 1000$), w którym opornik o oporze R jest podłączony do jednego zwoju. Obliczyć natężenie prądu płynącego przez opornik przy założeniu, że prąd ten praktycznie nie wpływa na strumień pola magnetycznego w rdzeniu autotransformatora, a opór R jest znacznie większy od oporu jednego zwoju. Jakie jest przesunięcie fazowe prądu płynącego przez opornik w stosunku do prądu płynącego przez autotransformator? Jaka powinna być indukcyjność autotransformatora, aby przyjęte założenie mogło być spełnione?

46. Wyobraźmy sobie nieszczęśnika, pod którym załamał się lód na jeziorze. Mając przy sobie woreczek z piaskiem, uwiązany na cienkim sznurku, usiłuje on rzucić go tak, by dotarł jak najbliżej brzegu. Pod jakim kątem względem poziomu powinien być rzucony woreczek z daną prędkością, jeśli współczynnik tarcia woreczka o lód wynosi 0,1? Opór powietrza zaniedbujemy.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 11/1986

Przypominamy treść zadań:

37. Jednorodna, pozioma tarcza o masie M i promieniu R może się obracać, praktycznie bez tarcia, wokół pionowej osi przechodzącej przez jej środek O (rysunek 2).
Z punktu P obwodu tej, początkowo nieruchomej, tarczy wyrusza żuczek (o rozmiarach znacznie mniejszych od R), który wędruje dookoła tarczy po jej obwodzie i zatrzymuje się w punkcie P po dokonaniu okrążenia. Znając kąt α, o jaki obróciła się tarcza w czasie tej wędrówki, wyznaczyć masę żuczka.
38. Znaleźć wypadkową pojemność nieskończonego łańcucha złożonego z jednakowych pojemności C.

37. Niech poszukiwana masa żuczka będzie m. Oznaczmy prędkość kątową żuczka względem osi tarczy w inercjalnym układzie współrzędnych przez ω_m, a prędkość kątową tarczy przez ω_t (dodatnie wartości obu prędkości odpowiadają temu samemu kierunkowi obrotów, np. zgodnemu z kierunkiem wędrówki żuczka). Względna prędkość kątowa żuczka względem tarczy jest równa

$$\omega = \omega_m - \omega_t. \tag{1}$$

Ze względu na prawo zachowania momentu pędu (względem osi tarczy) mamy

$$m\omega_m R^2 + I\omega_t = 0,$$

gdzie $I = MR^2/2$ jest momentem bezwładności tarczy względem jej osi. Wynika stąd

$$\frac{\omega_m}{\omega_t} = -\frac{M}{2m},$$

a po uwzględnieniu związku (1)

$$\omega = -\frac{M+2m}{2m}\omega_t. \tag{2}$$

Fakt obejścia przez żuczka całego obwodu tarczy zapisujemy jako

$$\int_0^{t_0} \omega\, dt = 2\pi, \tag{3}$$

gdzie t oznacza zmienną czasową, a t_0 — czas wędrówki żuczka. Kąt, o jaki obróci się w tym czasie tarcza, wyraża się wzorem

$$\int_0^{t_0} \omega_t\, dt = -\alpha \tag{4}$$

(znak minus wskazuje, że tarcza obróciła się w kierunku przeciwnym do kierunku wędrówki żuczka).

Ze wzorów (2), (3), (4) wynika $\alpha = \frac{2m}{M+2m} 2\pi$.

Stąd wyznaczamy $m = \frac{\alpha}{2\pi - \alpha} \frac{M}{2}$.

Uzyskany wynik nie zależy od postaci funkcji $\omega(t)$, czyli od tego, jak żuczek zmienia w drodze tempo marszu, a nawet od tego, czy przystaje lub chwilami się cofa.

38. Niech wypadkowa pojemność łańcucha wynosi C_{AB}. Zauważmy, że dodanie do nieskończonego łańcucha jeszcze jednego „ogniwa", jak na rysunku 3, nie zmieni jego pojemności.

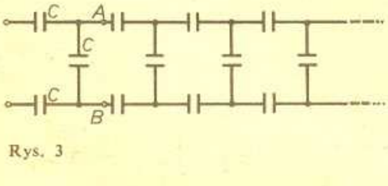
Wynika stąd
$$\frac{1}{C_{AB}} = \frac{2}{C} + \frac{1}{C + C_{AB}}.$$

Równanie to przyjmuje po przekształceniach postać równania kwadratowego o dwóch pierwiastkach, z których tylko jeden — jako nieujemny — ma sens fizyczny i wyraża poszukiwaną pojemność:

$$C_{AB} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} C \approx 0{,}37\, C.$$

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 33 /WT=2,40/ i 34 /WT=3,80/ z numeru 9/1986

Tomasz Rawlik	- Gliwice	39,04pkt
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	36,68pkt
Aleksander Surma	- Myszków	34,50pkt
Anna Gluza	- Toruń	27,03pkt
Paweł Rogocz	- Legnica	23,63pkt
Jacek Stelmach	- Zabrze	20,80pkt
Piotr Bała	- Toruń	20,62pkt



Rys. 3