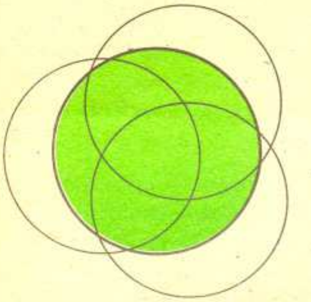
Hipoteza Hadwigera o pokryciu brył wypukłych zmniejszonymi obrazami jednokładnymi

Dr Marek LASSAK, dr Horst MARTINI

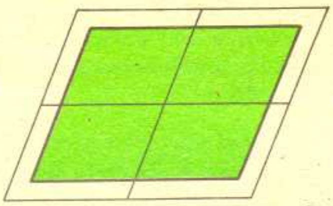
Chcemy przedstawić pewien problem geometryczny sformułowany 30 lat temu. Angażuje on wielu specjalistów z dziedziny geometrii kombinatorycznej. Dzięki prostemu sformułowaniu przyciąga także amatorów.

Przypuszczenie Hadwigera

Koło K można pokryć sumą trzech mniejszych kół (rys. 1), podczas gdy dwa nie starczają. Dowolny równoległobok P daje się pokryć czterema swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi (rys. 2).



Rys. 1



Rys. 2

Jednocześnie trzy takie zmniejszone równoległoboki nie wystarczają (dlaczego?). Sześcian S daje się pokryć ośmioma swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi, siedem zaś nie starcza. W 1957 roku szwajcarski geometra Hadwiger wysunął przypuszczenie [2], że dowolna wypukła bryła euklidesowej przestrzeni trójwymiarowej E^3 daje się pokryć ośmioma swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi. Problem ten pozostaje nie rozwiązany mimo intensywnych badań. Hadwiger sformułował swoje przypuszczenie także dla n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E^n. Mówi ono, że dowolna bryła wypukła w E^n powinna dać się pokryć za pomocą 2^n swoich zmniejszonych jednokładnych obrazów. Prócz oczywistej odpowiedzi dla $n = 1$ pozytywne rozwiązanie znane jest tylko dla $n = 2$.

Przypomnijmy, że zbiór $A \subset E^n$ nazywamy **wypukłym**, gdy wraz z dowolną parą swoich punktów zawiera cały odcinek łączący te punkty. Jeżeli ponadto A jest domknięty, ograniczony i zawiera punkty wewnętrzne, to nazywamy go **bryłą wypukłą**. Przy $n \geqslant 2$ ostatni warunek oznacza, że A nie mieści się w przestrzeni niższego wymiaru. Na przykład trójkąt jest bryłą wypukłą w E^2, ale nie jest bryłą wypukłą w E^3.

Łatwy rachunek pokazuje, że dowolne przesunięcie zmniejszonego jednokładnego obrazu wypukłej bryły C jest także zmniejszonym obrazem jednokładnym bryły C. Dlatego rozważając pokrycie bryły wypukłej C jej zmniejszonymi obrazami jednokładnymi można nie zwracać uwagi na położenie środków jednokładności. Wystarczy pokrywać C przesunięciami pewnego jej zmniejszonego obrazu.

Najmniejszą możliwą liczbę zmniejszonych jednokładnych obrazów wypukłej bryły C wystarczającą do pokrycia C oznaczamy przez $L(C)$. Symbol ten jest bardzo wygodny. Możemy krótko napisać, że $L(K) = 3$, $L(P) = 4$, $L(S) = 8$. Przypuszczenie Hadwigera wyraża się nierównością $L(C) \leqslant 2^n$ dla dowolnej bryły wypukłej $C \subset E^n$. Może Czytelnik zechce odgadnąć i ewentualnie uzasadnić wartości $L(C)$ dla C będącego czworościanem, ostrosłupem o podstawie kwadratowej, a także kulą w przestrzeni E^3, i ogólniej, przestrzeni E^n.

Odpowiedź dla $n = 2$

Zgodnie z terminologią przyjętą dla E^n także przy $n = 2$ będziemy używać określenia „bryła wypukła", mimo że słowo „bryła" niezbyt kojarzy się nam ze zbiorami płaskimi. Pokryciem płaskiej bryły wypukłej swoimi zmniejszonymi jednokładnymi obrazami zajął się jeszcze dwa lata przez Hadwigerem niemiecki matematyk Levi. Udowodnił on [5] następujące

Twierdzenie 1. Dla dowolnej bryły wypukłej $C \subset E^2$ nie będącej równoległobokiem zachodzi równość $L(C) = 3$.

Razem z równością $L(P) = 4$ twierdzenie to dawało dla $n = 2$ pozytywną odpowiedź na przypuszczenie Hadwigera jeszcze przed jego opublikowaniem: każda płaska bryła wypukła daje się pokryć czterema swoimi zmniejszonymi jednokładnymi obrazami. Pojawia się tutaj naturalne pytanie o najmniejszą możliwą skalę tych czterech obrazów. Odpowiemy na nie w Twierdzeniu 2. Najpierw jednak potrzebujemy pewnej definicji oraz dwóch własności sformułowanych jako Zadanie i Lemat (może Czytelnik spróbuje rozwiązać Zadanie, dowód Lematu jest dość trudny).

Równoległoboki P, Q nazywamy **quasi-dualnymi**, jeżeli boki P są równoległe do przekątnych Q oraz jeżeli boki Q są równoległe do przekątnych P.

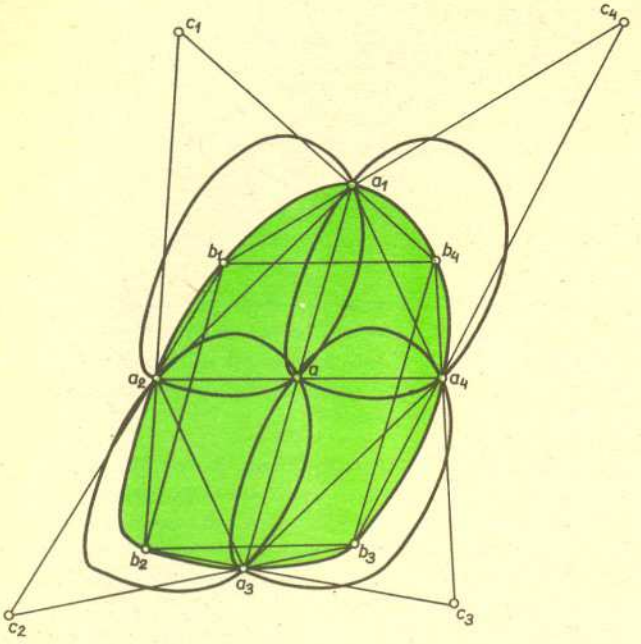
Zadanie. Niech P, Q będą równoległobokami quasi-dualnymi. Uzasadnić, że stosunki długości boków P do równoległych przekątnych Q są identyczne. Oznaczmy te stosunki przez p. Wykazać, że stosunki długości boków Q do przekątnych P są równe i wynoszą $q = 1/2p$.

Lemat. W dowolną bryłę wypukłą $C \subset E^2$ daje się wpisać para równoległoboków quasi-dualnych.

Kolej na obiecane twierdzenie [4]:

Twierdzenie 2. Dowolna bryła wypukła $C \subset E^2$ daje się pokryć czterema swoimi jednokładnymi obrazami o skali $\sqrt{2}/2$.

Dowód. Lemat pozwala znaleźć takie kolejne punkty a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4 na brzegu C, że czworokąty $P = a_1a_2a_3a_4$ oraz $Q = b_1b_2b_3b_4$ są quasi-dualnymi równoległobokami (rys. 3). Przynajmniej jedna z liczb p, q występujących w Zadaniu jest nie większa niż $\sqrt{2}/2$. Niech np. $p \leqslant \sqrt{2}/2$.



Rys. 3

Oznaczmy przez a środek równoległoboku P. Niech c_1, c_2, c_3, c_4 będą punktami wspólnymi par prostych zawierających odpowiednio odcinki: a_1b_4 oraz a_2b_2, a_2b_1 oraz a_3b_3, a_3b_2 oraz a_4b_4, a_4b_3 oraz a_1b_1 (zob. rys. 3). Ponieważ $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4$ są kolejnymi punktami brzegu bryły C, więc C jest zawarte w sumie czworokątów $aa_1c_1a_2$, $aa_2c_2a_3$, $aa_3c_3a_4$, $aa_4c_4a_1$. Niech H_i będzie jednokładnością o środku c_i i skali p, gdzie $i = 1, 2, 3, 4$. Ponieważ $H_1(b_4) = a_1$, $H_1(b_2) = a_2$, $a_1a \| b_4b_3$ oraz $a_2a \| b_2b_3$, więc $H_1(C)$ pokrywa trójkąt aa_1a_2. Niech $x \in C$ będzie punktem trójkąta $a_1a_2c_1$. Ponieważ $H_1(C)$ jest wypukłe i zawiera punkty $a_1, a_2, H_1(x)$, więc zawiera też trójkąt $a_1a_2H_1(x)$. W szczególności $x \in H_1(C)$. Czyli $H_1(C)$ zawiera tę część C, która leży w czworokącie $aa_1c_1a_2$. Analogicznie, części wspólne bryły C i czworokątów $aa_2c_2a_3$, $aa_3c_3a_4$, $aa_4c_4a_1$ są podzbiorami zbiorów $H_2(C)$, $H_3(C)$, $H_4(C)$. Tak więc C daje się pokryć czterema obrazami o skali p. Tym bardziej daje się więc pokryć czterema swoimi jednokładnymi obrazami o skali $\sqrt{2}/2$.

Przypadek $n = 3$

Niech $C \subset E^3$ będzie bryłą wypukłą, a x jej punktem brzegowym. Mówimy, że płaszczyzna π podpiera bryłę C w punkcie x, jeżeli $x \in \pi$ i jeżeli C zawiera się całkowicie w jednej z domkniętych półprzestrzeni wyznaczonych przez π. Jeżeli tylko jedna płaszczyzna podpiera C w punkcie x, to nazywa się on **regularny**. Jeżeli takich podpierających płaszczyzn jest więcej, to x nazywamy **nieregularnym**. Na przykład wszelkie punkty krawędziowe, a w tym wierzchołki, są jedynymi nieregularnymi punktami wielościanu wypukłego. Wszystkie punkty brzegowe kuli są regularne. W 1960 roku Bołtiański podał

Twierdzenie 3. Jeżeli bryła wypukła $C \subset E^3$ ma na brzegu tylko punkty regularne, to $L(C) = 4$.

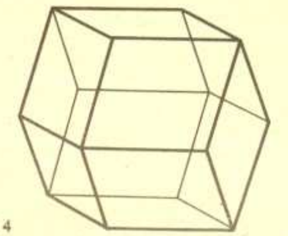
Przystępny dowód tego twierdzenia można znaleźć w popularnonaukowej książeczce [1]. Okazuje się, że podane twierdzenie daje się nieznacznie ulepszyć. Udowodniono, że brzeg C może mieć do czterech punktów nieregularnych i nadal $L(C) = 4$.

Inny kierunek badań w celu znalezienia chociażby częściowego rozwiązania polega na rozważaniu tylko środkowo-symetrycznych brył wypukłych. Przy $n = 3$ dwa oszacowania wspomniane w ostatniej części tego artykułu dają $L(C) \leq 148$ oraz $L(C) \leq 64$ dla dowolnej środkowo-symetrycznej bryły wypukłej $C \subset E^3$. Ostatnio udało się uzyskać [3] ostateczny wynik w tym kierunku:

Twierdzenie 4. Dowolna środkowo-symetryczna bryła wypukła przestrzeni E^3 daje się pokryć ośmioma swoimi jednokładnymi obrazami.

Oczywiście dla równoległościanu K mamy $L(K) = 8$. Można przypuszczać, że dla dowolnej wypukłej bryły środkowo-symetrycznej $C \subset E^3$ różnej od równoległościanu będzie $L(C) \leq 6$. Nawet przy dodatkowym założeniu, że C jest wielościanem, nie udało się uzyskać odpowiedzi. Natomiast jest ona pozytywna [6], gdy założymy środkową symetrię nie tylko dla naszego wielościanu, ale i jego ścian (zob. tw. 5). Takie wielościany zwane są **zonotopami**. Stosuje się je w krystalografii. Najprostszym przykładem zonotopu jest równoległościan. Innym przykładem jest dwunastościan rombowy (rys. 4).

Twierdzenie 5. Dowolny, różny od równoległoboku zonotop $Z \subset E^3$ daje się pokryć sześcioma swoimi zmniejszonymi obrazami jednokładnymi.



Rys. 4

Co wiadomo o pokryciu w E^n?

Przypuszczenie Hadwigera zostało potwierdzone tylko dla pewnych klas brył wypukłych. Klasę taką stanowią bryły wypukłe mające co najwyżej $2^n - 1$ punktów nieregularnych na brzegu. Wynika to z twierdzenia Bołtiańskiego, że $L(C) \leq m+1$, jeżeli C ma na brzegu co najwyżej m punktów nieregularnych (zob. [1]). Także $L(Z) \leq 2^n$ dla dowolnego zonotopu $Z \subset E^n$, co pokazali Bołtiański i Sołtan. Co więcej, $L(Z) \leq \frac{3}{4} \cdot 2^n$, jeżeli $Z \subset E^n$ jest zonotopem różnym od równoległościanu [6]. Dla dowolnej środkowo-symetrycznej bryły wypukłej $C \subset E^n$ Rogers podał oszacowanie $L(C) \leq 2^n(n \ln n + n \ln\ln n + 5n)$, a Lewin i Pietuchin wykazali, że $L(C) \leq (n+1)^n$. Dowodów tych dwóch oszacowań nie opublikowano.

Bibliografia

[1] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и Задачи Комбинаторной Геометрии*, Наука, 1965.

[2] H. Hadwiger, *Ungelöste Probleme, Nr.* 20, Elem. Math. 12 (1957), 121.

[3] M. Lassak, *Solution of Hadwiger's covering problem for centrally symmetric convex bodies in* E^3, J. London Math. Soc. 30 (1984), 501—511.

[4] M. Lassak, *Covering a plane convex body by four homothetical copies with the smallest positive ratio*, Geom. Dedicata (w druku).

[5] F. W. Levi, *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns*, Arch. Math. 6 (1955), 369—370.

[6] H. Martini, *Some results and problems around zonotopes*, Intuitive Geometry, Coll. Math. Soc. J. Bolyai, North Holland (w druku).