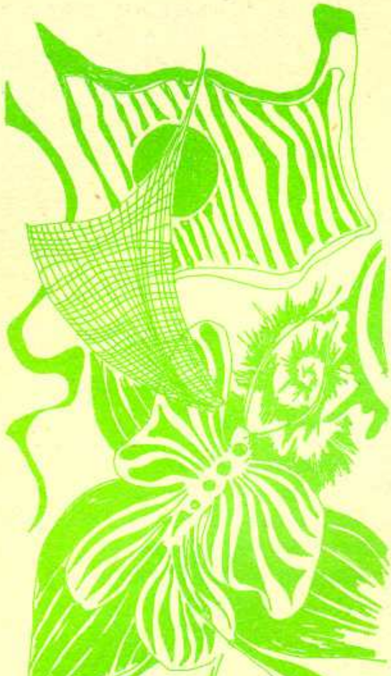


Białe karły

Dr Tomasz KWAST

Każda stabilna gwiazda zawdzięcza swoje trwanie równoważeniu się sił działających na każdy element jej objętości. Siły te są przynajmniej dwie: ciężar i parcie hydrostatyczne. Faktem jest, że parciu hydrostatycznemu pomaga ciśnienie światła, nie będziemy jednak go uwzględniać, gdyż w gwiazdach, o których będzie mowa, jest ono nieistotne. Zatem w sferycznie symetrycznej gwieździe element objętości o jednostkowej podstawie i wysokości $\mathrm{d}r$ w odległości r od środka gwiazdy waży $\mathrm{G}M_r\varrho\,\mathrm{d}r/r^2$, gdzie M_r jest masą gwiazdy zawartą w kuli o promieniu r, ϱ-gęstością elementu, G — stałą grawitacji. Ciężar ten jest równoważony przez różnicę ciśnień $\mathrm{d}P$ na drodze $\mathrm{d}r$. W rezultacie w każdym punkcie wewnątrz gwiazdy spełnione jest równanie (równowagi hydrostatycznej)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mathrm{G}M_r\varrho}{r^2}.$$

Oczywiste jest ponadto, że masa $\mathrm{d}M_r$ warstewki gwiazdy o grubości $\mathrm{d}r$ wynosi $4\pi r^2\varrho\,\mathrm{d}r$, skąd mamy drugie równanie (ciągłości)

$$\frac{\mathrm{d}M_r}{\mathrm{d}r} = 4\pi r^2\varrho.$$

(O innych równaniach budowy wewnętrznej gwiazd pisaliśmy w *Delcie* 12/1982.)

Z tych dwóch równań można od razu wyeliminować M_r.
Mianowicie: pomnożywszy pierwsze przez r^2/ϱ, zróżniczkowawszy formalnie względem r i skorzystawszy z drugiego dostajemy

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\varrho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi\mathrm{G}\varrho.$$

Równanie to zawiera dwie funkcje niewiadome $P(r)$ i $\varrho(r)$, jest więc nierozwiązalne, dopóki nie określimy jeszcze jakiegoś związku między nimi. Narzucające się tu równanie stanu gazu doskonałego jest nieprzydatne, bo wprowadza następną nieznaną funkcję, temperaturę. Tak się jednak składa, że w pewnych warunkach temperatura gazu nie ma wpływu na pozostałe jego parametry. Tak jest w niskich temperaturach lub przy dużej gęstości gazu, gdy przejawia on własności kwantowe. Jest on wtedy tzw. gazem zdegenerowanym i jego równanie stanu jest algebraicznym związkiem między ciśnieniem i gęstością, zawierającym ponadto tylko stałe fizyczne. Nie będziemy tego równania stanu wyprowadzać — wydłużyłoby to znacznie artykuł — a ponadto bardziej zależy nam na ukazaniu dość niezwykłych własności gwiazd zbudowanych z materii zdegenerowanej. Przyjmijmy więc bez dowodu, że parametryczne równanie stanu elektronowego gazu zdegenerowanego ma postać:

ciśnienie $P = A\cdot f(x)$, gęstość $\varrho = Bx^3$,

gdzie $f(x) = 2x^3\sqrt{1+x^2} - 3x\sqrt{1+x^2} + 3\,\mathrm{Arsinh}\,x$,

$$A = \frac{\pi \mathrm{m}^4\mathrm{c}^5}{3\mathrm{h}^3} = 6{,}002\cdot 10^{21}\ \mathrm{Pa},\quad B = \frac{8\pi\mathrm{m}^3\mathrm{c}^3\mathrm{H}}{3\mathrm{h}^3}\mu_e = 9{,}739\cdot 10^8\,\mu_e\ \mathrm{kg/m^3},$$

gdzie z kolei m oznacza masę elektronu, c — prędkość światła, h — stałą Plancka, H — masę jednostki masy atomowej, μ_e jest tzw. masą atomową przypadającą na jeden elektron i dla helu wynosi dokładnie 2 (każdy atom helu ma masę atomową 4 i 2 elektrony), natomiast dla pierwiastków cięższych niewiele więcej.

Przejdźmy w ostatnim równaniu do zmiennych bezwymiarowych (η, φ) wykonując podstawienie

$$r = \alpha\eta,\ x = \sqrt{\beta^2\varphi^2 - 1},$$

gdzie $\alpha = \dfrac{1}{B\beta}\sqrt{\dfrac{2A}{\pi\mathrm{G}}}$, a sens parametru β wyjaśni się za chwilę. Po nieco żmudnych, ale łatwych rachunkach dostajemy równanie

$$(*)\qquad \frac{1}{\eta^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\eta^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right) = -\left(\varphi^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)^{3/2}.$$

Od funkcji $\varphi(\eta)$ będziemy żądać, by była unormowana ($\varphi(0) = 1$) oraz stosownie „gładka" ($\varphi'(0) = 0$). Ponieważ gęstość ϱ wynosi $B(\beta^2\varphi^2 - 1)^{3/2}$, a co za tym idzie — w centrum gwiazdy mamy $\varrho_c = B(\beta^2 - 1)^{3/2}$, więc β jest monotoniczną funkcją gęstości centralnej i przybiera wartości z przedziału $(1, \infty)$.

Rozwiązanie zadania M 464. Mamy $\mathrm{E}e^{\lambda S_1} = \dfrac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}$. Przypuśćmy, że $\mathrm{E}e^{\lambda S_m} = \left(\dfrac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)^m$. Wtedy

$$\mathrm{E}e^{\lambda S_{m+1}} = \mathrm{E}e^{\lambda(S_m+X_{m+1})} = \mathrm{E}e^{\lambda S_m}e^{\lambda X_{m+1}} = \sum_{k=-m}^{m} e^{\lambda k}e^{\lambda}P(S_m = k, X_{m+1} = 1) + \sum_{k=-m}^{m} e^{\lambda k}e^{-\lambda}P(S_m = k, X_{m+1} = -1) =$$

$$= \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\cdot\sum_{k=-m}^{m} e^{\lambda k}P(S_m = k) = \frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\cdot \mathrm{E}e^{\lambda S_m} = \left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)^{m+1}.$$

Korzystaliśmy z faktu, że zdarzenia $\{S_m = k\}$ i $\{X_{m+1} = j\}$ są niezależne.
Zostało wykazane, że $\mathrm{E}e^{\lambda S_n} = \left(\dfrac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)^n$ dla każdego n. Na mocy poprzedniego zadania $\mathrm{E}e^{\lambda S_n} \leqslant e^{\frac{1}{2}\lambda^2 n}$.

Własności białych karłów

β^2	ϱ_c/B	η_1	$R/\alpha\beta$	$(-\eta^2\varphi')_1$	M/M_{max}
1	0	∞	∞	0	0
2	1	3,533	2,498	0,707	0,350
5	8	3,727	1,667	1,243	0,616
10	27	4,069	1,287	1,519	0,752
20	83	4,460	0,997	1,710	0,847
50	343	4,986	0,705	1,865	0,924
100	985	5,357	0,536	1,932	0,957
∞	∞	6,897	0	2,018	1

Mamy więc pierwszy, bardzo ważny wniosek: gęstość centralna jednoznacznie określa strukturę zdegenerowanej gwiazdy. Bowiem w równaniu (*) mamy tylko jeden dowolny parametr β („gęstość centralną") i ma ono, przy narzuconych warunkach początkowych, rozwiązanie.

Tabelka podaje niektóre parametry białych karłów w zależności od β (dolny wskaźnik „1" oznacza wartość danej funkcji na powierzchni gwiazdy, czyli tam, gdzie $\varphi(\eta)$ przyjmuje po raz pierwszy wartość zero: $\varphi(\eta_1) = 0$). Posługując się tą tabelką można samemu obliczyć np. masę (M), rozmiary (R) białego karła o zadanej gęstości centralnej. Mamy bowiem

$$M = 4\pi \int_0^R \varrho r^2 \mathrm{d}r = 4\pi\alpha^3 B\beta^3 \int_0^{\eta_1} \mathrm{d}\left(-\eta^2 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right) = 4\pi \frac{1}{B^2}\left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{3/2}\left(-\eta^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\eta}\right)_1 .$$

Ostatni czynnik nawet dla najmasywniejszych gwiazd jest skończony, zatem widzimy, że istnieje naturalne ograniczenie na masę białego karła. Dla karła helowego byłoby

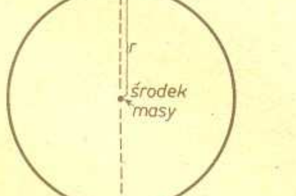
$$M_{max} = 4\pi \frac{1}{B^2}\left(\frac{2A}{\pi G}\right)^{3/2} \cdot 2{,}018 = \frac{5{,}826}{\mu_e^2} M_\odot = 1{,}456\ M_\odot .$$

Jest to tzw. granica Chandrasekhara. Biały karzeł o takiej masie musiałby mieć rozmiary zerowe, co wynika z faktu, że $R = \alpha\eta_1 = \mathrm{const}\cdot\eta_1/\beta \to 0$, przy $\beta \to \infty$. W ogólności widać, że im masywniejszy biały karzeł, tym jest mniejszy.

Pytanie tylko — czy aby nie zajmujemy się obiektami nieistniejącymi? Otóż nie. Nieustannie przerabiając wodór na hel każda gwiazda wytwarza w swoim centrum helowe jądro. Jeżeli masa gwiazdy jest niewielka (poniżej 0,5 $M_\odot$), to jej temperatura centralna jest zbyt niska, aby hel mógł zacząć się palić. Takie helowe jądro nie produkuje więc energii, a tylko zwiększa masę i ulega ściskaniu przez położone wyżej warstwy gwiazdy. Owo ściskanie prowadzi do degeneracji materii i tak w centrum gwiazdy powstaje nowy osobliwy obiekt — kula zdegenerowanego helu. Gdy zewnętrzne warstwy gwiazdy ulegną ewentualnie rozproszeniu (np. przechodząc przez fazę mgławicy planetarnej), helowe jądro zostaje odsłonięte i oczom obserwatora ukazuje się mała, gorąca gwiazda, świecąca już tylko dzięki stygnięciu, czyli helowy biały karzeł. Gwiazda masywniejsza jest w stanie sprężyć helowe jądro do temperatury wyższej od temperatury zapłonu helu. Wtedy w centrum jądra zaczynają tworzyć się jeszcze cięższe pierwiastki i tak dochodzi do powstania gwiazdy o wielowarstwowej strukturze z jądrem np. węglowym. Po rozproszeniu warstw zewnętrznych odsłania się biały karzeł o niejednorodnym składzie chemicznym. Zauważmy, że bez względu na skład chemiczny jego $\mu_e \approx 2$, wskutek czego jego maksymalna masa niewiele różni się od przytoczonej już granicy Chandrasekhara.

Dalsze losy takiej gwiazdy zależą od tego, jak bardzo jej masa jest zbliżona do granicy Chandrasekhara. Mało masywne białe karły — jak powiedzieliśmy — po prostu już tylko stygną, natomiast w masywnych może zmieniać się μ_e. Odpowiedzialny za to jest tzw. rozpad beta plus, czyli neutronizacja materii. Mianowicie, przy ogromnej gęstości materii wewnątrz gwiazdy zachodzi „łączenie" protonów z elektronami. Liczba nukleonów pozostaje wtedy stała, lecz ubywa elektronów, a więc μ_e rośnie. Obniża się wtedy wartość M_{max} i może się okazać, że od pewnej chwili masa karła (pozostając nie zmieniona) musiałaby być większa od dopuszczalnej przez aktualne μ_e. Prawdopodobnie wtedy centralne części karła zapadają się, wyzwolona w ten sposób ogromna energia grawitacyjna rozrywa resztę gwiazdy i obserwujemy wybuch supernowej I typu. Pozostaje po tym, być może, gwiazda neutronowa, ale to już inna historia.

Rozwiązanie zadania F 216. W egzotycznym atomie cząstki krążą po orbicie kołowej wokół środka masy. Ponieważ masy cząstek są równe, więc środek masy znajduje się w jednakowej odległości r od każdej z nich.



W normalnym atomie ze względu na dużą masę jądra w porównaniu z masą elektronu środek masy praktycznie pokrywa się ze środkiem jądra. Z porównania siły odśrodkowej i przyciągania elektrostatycznego

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(2r)^2} .$$

Z postulatu Bohra, $2rmv = nh/2\pi$, $n = 1, 2, \ldots$, i z powyższego równania otrzymujemy

$$(1)\qquad r = \frac{4\pi\varepsilon_0}{e^2}\frac{n^2h^2}{4\pi^2 m},\quad v = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\pi}{nh} .$$

Całkowita energia układu pozyton-elektron wynosi

$$(2)\qquad E = 2\frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{2r} .$$

Wstawiając (1) do (2) otrzymujemy energię poziomów energetycznych atomu

$$E_n = -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{\pi^2 m}{h^2 n^2} .$$

Wstawiając za m masę elektronu otrzymujemy energię stanu podstawowego pozytonium $E_1 = -6{,}8$ eV ($1\ \mathrm{eV} = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ J). Energia wypromieniowanego kwantu γ przy przejściu ze stanu o $n = 2$ do $n = 1$ w przypadku pionium wynosi

$$E_\gamma = E_2 - E_1 = \frac{m_\pi e^4}{16\varepsilon_0^2 h^2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 1{,}4\ \mathrm{MeV}.$$

Na podstawie wzoru (1) otrzymujemy promienie orbit stanu podstawowego pozytonium i pionium odpowiednio $r_e = 5{,}3\cdot 10^{-11}$ m, $r_\pi = 1{,}9\cdot 10^{-13}$ m.