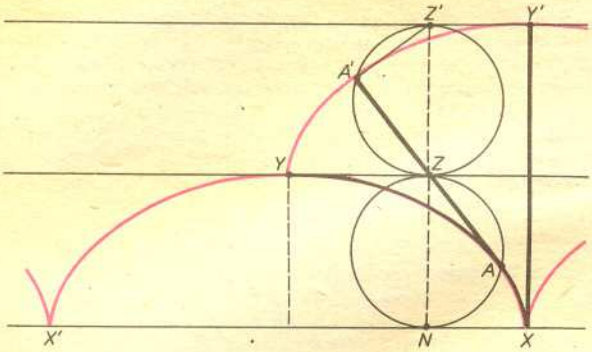
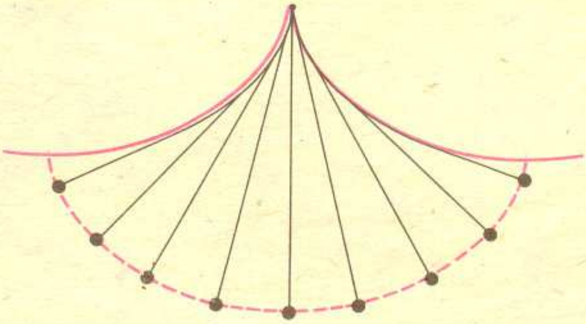




W tym celu musimy zająć się długościami łuków cykloidy i okręgu, który ją wyznacza. Ze sposobu powstawania cykloidy wiemy, że łuk $\overset{\frown}{ZA'}$ górnego okręgu ma długość YZ — prawda? Ponieważ $X'X = 2\pi r$, więc $YZ = X'N - \pi r$. Ale łuk $\overset{\frown}{NZA}$ dolnego okręgu ma długość $X'N$. Zatem długość łuku $\overset{\frown}{ZA'}$ jest równa długości łuku $\overset{\frown}{ZA}$. Czyli rzeczywiście punkty A, Z i A' leżą na jednej prostej, co oznacza, że koniec naciągniętej nici (poruszający się stale prostopadle do nici) przejdzie przez punkt A' — dowolny punkt górnej cykloidy.

Zupełnie przy okazji obliczyliśmy długość pełnego łuku cykloidy, jest ona równa $2XY'$, czyli $8r$, ośmiu promieniom wyznaczającego cykloidę okręgu.

A gdzie dobre wahadło,

bo dobra geometria już była? Znów obróćmy cykloidę do góry nogami. Jeśli pomiędzy dwoma łukami cykloidy wyznaczonej przez okrąg o promieniu r zawiesimy ciężarek na nitce o długości $4r$, to będzie się on wahał „po cykloidzie", a ponieważ cykloida jest tautochroną, więc okres jego wahań nie będzie zależał od wychylenia — zawsze będzie równy

$$4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Opracował *M. K.*

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 460. Obliczyć $\sin 18°$.
Rozwiązanie na str. 5

M 461. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a > 1$, $b > 1$ zachodzi nierówność

$$\log_a \frac{a+b}{2} \geqslant \log_{\frac{a+b}{2}} b.$$

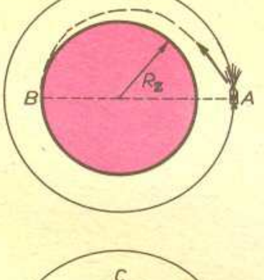
W. Mnich

Rozwiązanie na str. 10

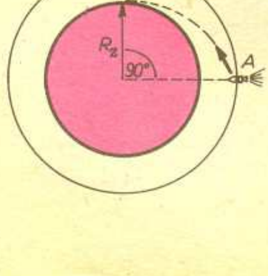
M 462. Niech $\binom{n}{k}$ będzie współczynnikiem Newtona, tj. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$.

Udowodnić, że $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI



F 214. Wyobraźmy sobie kolejną wyprawę na Księżyc, nie mniej pechową niż ekspedycja Apollo 13. Po wylądowaniu na powierzchni Księżyca komputer pokładowy odmawia posłuszeństwa. W jaki sposób astronauci mogą samodzielnie obliczyć wartość prędkości v, z jaką musiałby wystartować lądownik, aby połączyć się na orbicie ze statkiem-bazą? Statek-baza krąży po kołowej orbicie na wysokości równej promieniowi Księżyca $R_K = 1700$ km. Przyspieszenie swobodnego spadku g_K na Księżycu wynosi około 1,7 m/s².
Rozwiązanie na str. 11



F 215. Tej samej ekspedycji udało się dotrzeć z powrotem na kołową orbitę wokół Ziemi, na wysokości $h = 500$ km. Aby zejść na orbitę, z której możliwe jest lądowanie, należy na krótki czas włączyć silnik. Prędkość wylatujących z dyszy silnika gazów wynosi $u = 10^4$ m/s.
a) Jaka minimalna masa paliwa powinna zostać użyta do tego, aby po włączeniu hamującego silnika w punkcie A (patrz rysunek) trajektoria statku osiągała Ziemię w punkcie B?
b) Jaką masę paliwa należałoby zużyć, aby statek osiągnął Ziemię w punkcie C, jeśli włączony na krótko silnik nada dodatkowy pęd w kierunku centrum Ziemi? Masa statku wynosi $M = 12$ ton. Przyspieszenie swobodnego spadku na powierzchni Ziemi $g = 9{,}81$ m/s².
Rozwiązanie na str. 5