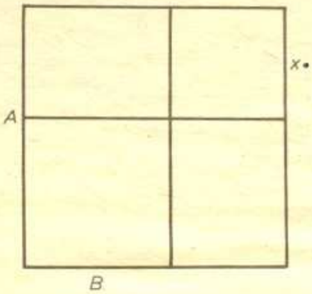
Jak rozwiązać równanie trzeciego stopnia



Najpierw nauczono się rozwiązywać równania kwadratowe postaci

$$x^2+px=q, \qquad \text{dla } p \text{ i } q \text{ dodatnich.}$$

Robiono to geometrycznie. Z kwadratu o boku A wycinamy w rogu kwadrat o boku B i największy kwadrat, jaki zmieści się w przeciwległym rogu — jego bok oznaczamy przez x. „Reszta" kwadratu to dwa jednakowe prostokąty o bokach B i x.

Mamy więc
$$B^2+x^2+2Bx=A^2,$$
czyli
$$x^2+2Bx=A^2-B^2.$$

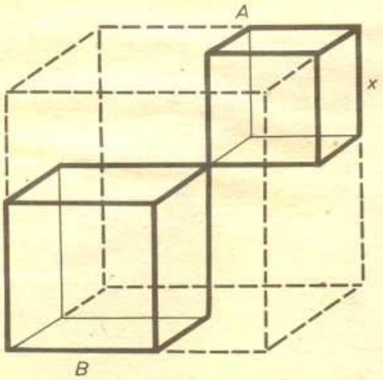
To równanie jest tego samego kształtu co pierwsze, więc zakładamy, że są one jednakowe. Mamy stąd dwa równania

$$2B=p \quad \text{i} \quad A^2-B^2=q.$$

Wówczas
$$A^2=q+B^2=q+\frac{p^2}{4}.$$

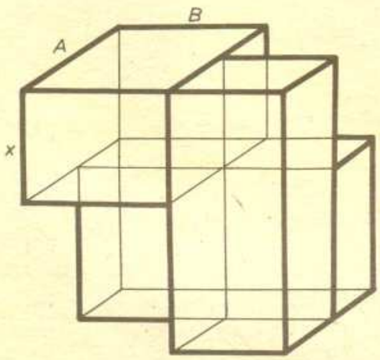
I w ten sposób znamy już x:

$$x=A-B=\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}-\frac{p}{2}.$$



Jest to (choć wygląda inaczej) znany ze szkoły wzór na rozwiązanie równania kwadratowego. Później bowiem zgodzono się, by ten wzór stosować również wtedy, gdy nie da się go geometrycznie zilustrować.

Na początku XVI wieku udało się zastosować tę metodę do rozwiązania równania trzeciego stopnia. Zrobiono tak.



Z sześcianu o krawędzi A wycinamy w rogu sześcian o krawędzi B i największy sześcian, jaki zmieści się w przeciwległym rogu — jego krawędź oznaczamy przez x. „Reszta" sześcianu to trzy jednakowe prostopadłościany o krawędziach A, B i x. Mamy więc

$$B^3+x^3+3ABx=A^3,$$
czyli
$$x^3+3ABx=A^3-B^3.$$

Możemy więc rozwiązywać równania trzeciego stopnia postaci

$$x^3+px=q, \qquad \text{dla } p \text{ i } q \text{ dodatnich.}$$

Porównując takie równanie ze znalezionym równaniem geometrycznym otrzymujemy

$$3AB=p \quad \text{i} \quad A^3-B^3=q.$$

Wprowadzając pomocnicze zmienne $K=A^3$ i $L=B^3$ mamy

$$KL=\frac{p^3}{27} \ \text{i} \ K-L=q,$$
czyli
$$K(K-q)=\frac{p^3}{27} \ \text{i} \ L=K-q,$$
skąd
$$K^2-qK=\frac{p^3}{27},$$
a więc
$$K=\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2} \ \text{i} \ L=\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}.$$

W ten sposób znamy już x:

$$x=A-B=\sqrt[3]{K}-\sqrt[3]{L}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}.$$

Na rysunku (w centymetrach) jest $A=\frac{7}{2}$ i $B=2$, czyli rozwiązujemy równanie

$$x^3+21x=\frac{279}{8}.$$

Gdybyśmy nie znali A i B, moglibyśmy znaleźć x z podanego wzoru. Potworne rachunki prowadzące do wyniku $\frac{3}{2}$ pokazują, czym różni się rezultat matematyczny, gotowy wzór, od obliczenia konkretnej wartości.

Rozwiązanie zadania M 461. Dowodzimy nierówności dla $a \neq b$. Oznaczmy $s=(a+b)/2$. Zauważymy, że nierówność z treści zadania jest równoważna nierówności

$$\log_s a \cdot \log_a b \leqslant 1,$$

gdyż

$$\log_s a=\frac{1}{\log_a s}>0.$$

Nierówność tę otrzymujemy korzystając dwukrotnie z nierówności między średnią geometryczną i średnią arytmetyczną oraz z monotoniczności funkcji logarytmicznej

$$\sqrt{\log_s a \cdot \log_s b} \leqslant \frac{\log_s a+\log_s b}{2}=\log_s \sqrt{ab} \leqslant$$
$$\leqslant \log_s \frac{a+b}{2}=1.$$

Uwaga. Dla $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{3}{4}$ mamy

$$\log_a s=\frac{1}{2}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \log_s b,$$

i dla $a=\frac{1}{256}$, $b=\frac{127}{256}$ mamy

$$\log_a s=\frac{1}{4}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \leqslant \log_s b.$$

Rozwiązanie zadania F 214. Zgodnie z warunkami zadania prędkość lądownika na wysokości $H = R_K$ powinna być równa co do modułu prędkości statku-bazy. Prędkość jego możemy obliczyć z równości siły przyciągania grawitacyjnego i siły odśrodkowej: $GM_K m/(2R)^2 = mv^2/(2R_K)$. Jeśli dodatkowo zaniedbamy ruch obrotowy Księżyca i skorzystamy z relacji $GM_K = g_K R_K^2$, otrzymujemy prędkość statku-bazy $v^2 = g_K R_K/2$; M_K jest masą Księżyca, g_K przyspieszeniem swobodnego spadku na Księżycu, m — masą lądownika. Stosując teraz zasadę zachowania energii dla lądownika

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM_K}{R_K} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM_K}{2R_K}$$

i podstawiając wyrażenie na prędkość v otrzymujemy niezbędną prędkość lądownika

$$v_0 = \sqrt{3g_K R_K/2} \approx 2{,}1 \text{ km/s}.$$

Jest to jedynie wartość prędkości, jaką musi mieć lądownik. Niestety, jej kierunek nie pokrywa się z kierunkiem prędkości statku-bazy na orbicie. Aby zetknięcie było miękkie, niezbędna jest korekcja kierunku prędkości lądownika przy użyciu pomocniczych silników.

Pomińmy ten problem. Nasuwa się jeszcze pytanie, na ile ogólny jest uzyskany rezultat.

Po pierwsze: czy w każdym równaniu stopnia trzeciego

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

można „zgubić" wyraz zawierający x^2? Tak — należy podstawić $x = y - \frac{a}{3}$.

Po drugie: co się stanie, gdy zrezygnujemy z warunku dodatniości p i q? To poważna sprawa. W przypadku równania kwadratowego rezygnacja z tego warunku nie powodowała żadnych komplikacji — jeżeli we wzorze na x działania nie dały się wykonać (w obrębie liczb rzeczywistych), znaczyło to, że równanie nie ma (rzeczywistych) pierwiastków. A nie dawały się te działania wykonać, gdy pod pierwiastkiem (kwadratowym) znajdowała się liczba ujemna. W przypadku równania trzeciego stopnia w analogicznej sytuacji pierwiastek (rzeczywisty) może jednak istnieć. I da się uzyskać z tych wzorów pod warunkiem, że zaczniemy używać również liczb zespolonych. Ale to już inna historia.

Opracował *M.K.*

Rozwiązanie zadania M 462. Niech $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \binom{n}{k}$ (z dwumianu Newtona).

Wtedy $f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}\binom{n}{k}$. Podstawiając $x = 1$ otrzymujemy tezę.

Jak co roku organizujemy Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki. Zapraszamy do wzięcia udziału.

Oto regulamin:

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Oświaty i Wychowania.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.

Piotr Jędrzejewicz w karykaturze prof. L. Jeśmanowicza.

Protokół

Jury konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki na posiedzeniu w dniu 17.09.1986 r. obradując w składzie:

prof. dr Leon Jeśmanowicz — przewodniczący, dr hab. Marek Kordos, dr Jerzy Ryll, dr Jan Waszkiewicz, dr Jerzy Bednarczuk, biorąc pod uwagę pracę oraz przebieg jej obrony postanowiło:

1° przyznać Piotrowi Jędrzejewiczowi złoty medal i nagrodę w wysokości zł 12 000,— za pracę „O pewnych własnościach przestrzeni euklidesowych",

2° przyznać opiekunowi pracy Piotra Jędrzejewicza, koledze Mirosławowi Usckiemu nagrodę w wysokości zł 5 000,—.