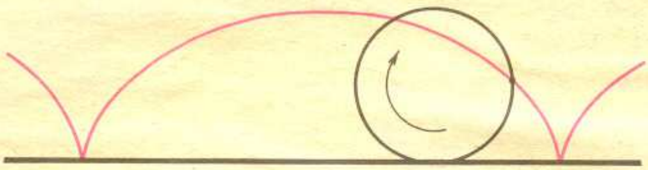
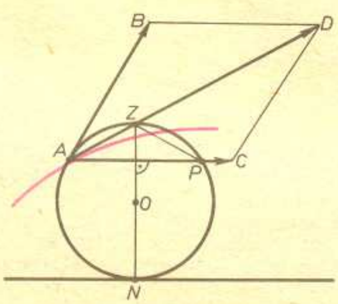
Dobre wahadło, czyli dobra geometria

Podstawowym elementem zegara jest i musi być urządzenie zachowujące się ściśle okresowo. Dziś może to być kryształek kwarcu albo drgająca sprężyna. W XVII wieku urządzeniem takim było wahadło (dziś również, choć rzadko, spotykane). Ale wahadło ,,takie zwykłe" ma przykrą własność — okres jego wahań zależy od początkowego wychylenia. Powstał więc problem, czy można zbudować wahadło bez tej wady. Udało się to Christiaanowi Huygensowi (1629—1695). Wykorzystał do tego celu cykloidę — krzywą, jaką zakreśla punkt okręgu toczącego się po prostej. A że nie lubił powstającej właśnie geometrii analitycznej i analizy, więc używał w swoich badaniach tylko bardzo prostej ,,zwykłej" geometrii.



Styczna do cykloidy

przechodzi zawsze przez najwyższy punkt wyznaczającego cykloidę okręgu. Huygens dowiódł tego tak. Punkt na cykloidzie porusza się równocześnie ruchem jednostajnym po prostej i ruchem jednostajnym po okręgu. Ponieważ okrąg się toczy, a nie ślizga, więc szybkości obu ruchów są jednakowe ($AB = AC$). Aby przekonać się, że styczna (prosta o kierunku wypadkowej prędkości) przechodzi przez punkt Z, wystarczy udowodnić, że $\sphericalangle BAZ = \sphericalangle ZAC$, bo $ABDC$ jest rombem. Ale ponieważ $AP \perp OZ$, więc trójkąt AZP jest równoramienny. Stąd $\sphericalangle ZAC = \sphericalangle ZAP = \sphericalangle ZPA$. Równocześnie $\sphericalangle ZPA = \sphericalangle BAZ$, bo są to kąty wpisany i dopisany oparte na tej samej cięciwie AZ.



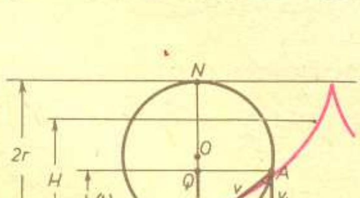
Cykloida jest tautochroną,

czyli krzywą, po której kulka (punkt materialny) stacza się w najniższe położenie w takim samym czasie niezależnie od tego, w którym punkcie cykloidy ją położymy. Oczywiście tautochroną jest cykloida położona ,,do góry nogami".

Na takiej cykloidzie wyznaczonej przez okrąg o promieniu r połóżmy kulkę w punkcie na wysokości H i puśćmy. Po pewnym czasie t kulka będzie już na wysokości tylko $h(t)$. Zauważmy, że nie tyle interesuje nas prędkość v kulki, co jej składowa pionowa $v_\downarrow$. Wartość tej składowej możemy obliczyć wykorzystując to, czego dowiedzieliśmy się o stycznej do cykloidy ($|v|$ to długość wektora v).

$$\frac{|v_\downarrow|}{|v|} = \frac{QZ}{AZ} = \frac{QZ}{\sqrt{QZ\cdot NZ}} = \sqrt{\frac{QZ}{NZ}} = \sqrt{\frac{h(t)}{2r}},$$

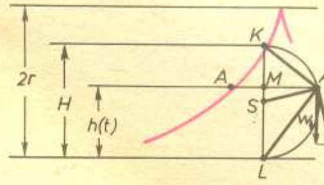
bo w trójkącie prostokątnym ZAN jest $AZ^2 = QZ\cdot NZ$.



Genialny pomysł Huygensa (zastępujący użycie równań różniczkowych) polega na wyobrażeniu sobie drugiej kulki, która porusza się po półokręgu w ten sposób, że stale jest na tej samej wysokości co kulka tocząca się po cykloidzie. Warunek ten oznacza, że dla kulki poruszającej się po półokręgu z prędkością w składowa pionowa $w_\downarrow$ tej prędkości jest stale taka sama jak $v_\downarrow$. Wyznaczmy $w_\downarrow$

$$\frac{|w_\downarrow|}{|w|} = \frac{A'M}{A'S} = \frac{\sqrt{KM\cdot ML}}{A'S} = \frac{\sqrt{(H-h(t))\cdot h(t)}}{\frac{H}{2}},$$

bo $A'M \perp w_\downarrow$, $A'S \perp w$, a w trójkącie prostokątnym $KA'L$ jest $A'M^2 = KM\cdot ML$.



Ponieważ $v_\downarrow$ i $w_\downarrow$ są równe, więc w szczególności $|v_\downarrow| = |w_\downarrow|$. Pozwala to wyliczyć $|w|$ za pomocą $|v|$. Mamy bowiem

$$|v|\sqrt{\frac{h(t)}{2r}} = |v_\downarrow| = |w_\downarrow| = |w|\,\frac{2\sqrt{(H-h(t))\cdot h(t)}}{H},$$

czyli

$$|w| = |v|\,\frac{H}{2}\sqrt{\frac{1}{2r(H-h(t))}}.$$

Wartość $|v|$ możemy obliczyć z prawa zachowania energii mechanicznej: strata energii potencjalnej przy przejściu kulki z wysokości H na wysokość $h(t)$ jest równa uzyskanej energii kinetycznej

$$mg(H-h(t)) = \frac{mv^2}{2},$$

czyli

$$|v| = \sqrt{v^2} = \sqrt{2g(H-h(t))}.$$

Stąd

$$|w| = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{r}}.$$

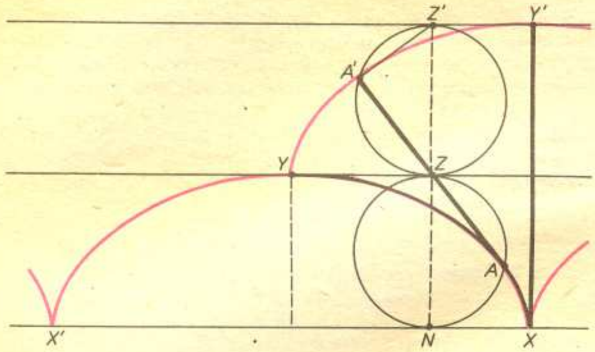
A więc szybkość zastępczego ruchu po półokręgu okazuje się stała! Łatwo teraz obliczyć czas, w którym druga kulka przebiegnie półokrąg

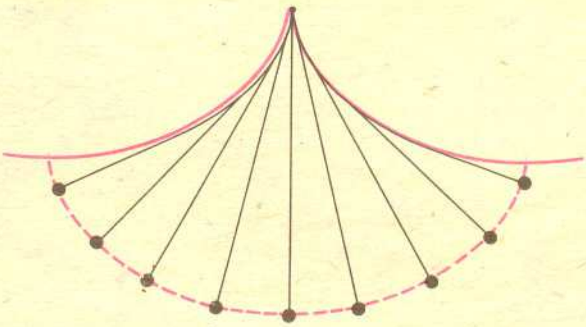
$$T = \frac{\frac{H}{2}\cdot\pi}{\frac{H}{2}\cdot\sqrt{\frac{g}{r}}} = \pi\sqrt{\frac{r}{g}},$$

czyli rzeczywiście czas ten nie zależy od wysokości, na jakiej położyliśmy kulkę. A tak samo jest dla rzeczywistego ruchu po cykloidzie.

Ewolwenta, czyli rozwijanie nici

Przywróćmy cykloidzie normalne położenie i postawmy na jej ,,wierzchołkach" drugą taką samą. Połóżmy też na cykloidzie nić zamocowaną w ,,dziobku" X i sięgającą akurat do ,,wierzchołka" Y, a następnie rozwijajmy nić z cykloidy stale ją napinając aż do położenia pionowego. Okaże się, że koniec nici będzie się poruszał właśnie po wyższej cykloidzie (uczenie mówiąc: wyższa cykloida jest jedną z ewolwent niższej). Sprawdźmy to.





W tym celu musimy zająć się długościami łuków cykloidy i okręgu, który ją wyznacza. Ze sposobu powstawania cykloidy wiemy, że łuk $\overset{\frown}{ZA'}$ górnego okręgu ma długość YZ — prawda? Ponieważ $X'X = 2\pi r$, więc $YZ = X'N - \pi r$. Ale łuk $\overset{\frown}{NZA}$ dolnego okręgu ma długość $X'N$. Zatem długość łuku $\overset{\frown}{ZA'}$ jest równa długości łuku $\overset{\frown}{ZA}$. Czyli rzeczywiście punkty A, Z i A' leżą na jednej prostej, co oznacza, że koniec naciągniętej nici (poruszający się stale prostopadle do nici) przejdzie przez punkt A' — dowolny punkt górnej cykloidy.

Zupełnie przy okazji obliczyliśmy długość pełnego łuku cykloidy, jest ona równa $2XY'$, czyli $8r$, ośmiu promieniom wyznaczającego cykloidę okręgu.

A gdzie dobre wahadło,

bo dobra geometria już była? Znów obróćmy cykloidę do góry nogami. Jeśli pomiędzy dwoma łukami cykloidy wyznaczonej przez okrąg o promieniu r zawiesimy ciężarek na nitce o długości $4r$, to będzie się on wahał „po cykloidzie", a ponieważ cykloida jest tautochroną, więc okres jego wahań nie będzie zależał od wychylenia — zawsze będzie równy

$$4\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Opracował *M. K.*

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 460. Obliczyć $\sin 18°$.
Rozwiązanie na str. 5

M 461. Wykazać, że dla dowolnych liczb $a > 1$, $b > 1$ zachodzi nierówność

$$\log_a \frac{a+b}{2} \geqslant \log_{\frac{a+b}{2}} b.$$

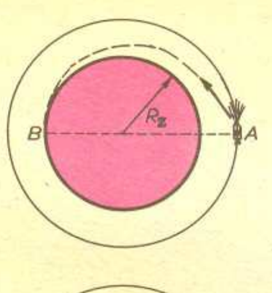
W. Mnich

Rozwiązanie na str. 10

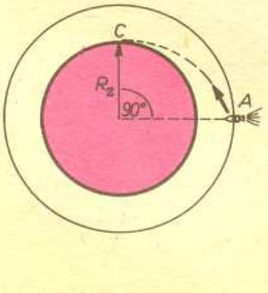
M 462. Niech $\binom{n}{k}$ będzie współczynnikiem Newtona, tj. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$.

Udowodnić, że $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$.
Rozwiązanie na str. 11

Redaguje mgr Rafał STAROŃSKI



F 214. Wyobraźmy sobie kolejną wyprawę na Księżyc, nie mniej pechową niż ekspedycja Apollo 13. Po wylądowaniu na powierzchni Księżyca komputer pokładowy odmawia posłuszeństwa. W jaki sposób astronauci mogą samodzielnie obliczyć wartość prędkości v, z jaką musiałby wystartować lądownik, aby połączyć się na orbicie ze statkiem-bazą? Statek-baza krąży po kołowej orbicie na wysokości równej promieniowi Księżyca $R_K = 1700$ km. Przyspieszenie swobodnego spadku g_K na Księżycu wynosi około 1,7 m/s².
Rozwiązanie na str. 11



F 215. Tej samej ekspedycji udało się dotrzeć z powrotem na kołową orbitę wokół Ziemi, na wysokości $h = 500$ km. Aby zejść na orbitę, z której możliwe jest lądowanie, należy na krótki czas włączyć silnik. Prędkość wylatujących z dyszy silnika gazów wynosi $u = 10^4$ m/s.
a) Jaka minimalna masa paliwa powinna zostać użyta do tego, aby po włączeniu hamującego silnika w punkcie A (patrz rysunek) trajektoria statku osiągała Ziemię w punkcie B?
b) Jaką masę paliwa należałoby zużyć, aby statek osiągnął Ziemię w punkcie C, jeśli włączony na krótko silnik nada dodatkowy pęd w kierunku centrum Ziemi? Masa statku wynosi $M = 12$ ton. Przyspieszenie swobodnego spadku na powierzchni Ziemi $g = 9{,}81$ m/s².
Rozwiązanie na str. 5