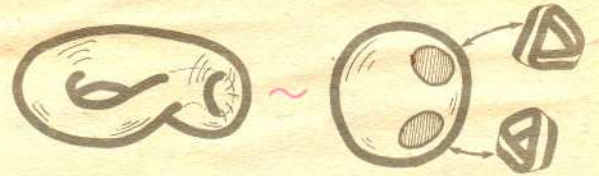


Wśród różnych przestrzeni, których badaniem zajmuje się topologia, szczególne miejsce zajmują różności, czyli przestrzenie, których każdy punkt ma otoczenie homeomorficzne z otwartą kulą (dyskiem) w przestrzeni euklidesowej.

Są one ważne z jednej strony dlatego, że pojawiają się w naturalny sposób w wielu działach matematyki, a nawet poza nią (już Poincaré na przełomie XIX i XX wieku zaczął badać różności pojawiające się w zagadnieniach mechaniki teoretycznej), z drugiej zaś — ponieważ ich regularność w skali lokalnej pozwala na formułowanie silnych twierdzeń dotyczących ich

„globalnego” kształtu. Przykładem takiego twierdzenia może być klasyfikacja różności dwuwymiarowych, czyli powierzchni: dowodzi się, że każda powierzchnia zwarta jest homeomorficzna ze sferą, z której wycięto pewną liczbę kół „zaklejając” powstałe dziury „rurkami”, czyli zbiorami homeomorficznymi z powierzchnią walca, lub wstęgami Möbiusa. Liczba doklejanych rurek i wstęg Möbiusa może być przy tym wyznaczona z pewnych algebraicznych niezmienników powierzchni.

Dwa zbiory są homeomorficzne, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczna funkcja ciągła z jednego na drugi i taka, że funkcja do niej odwrotna też jest ciągła.

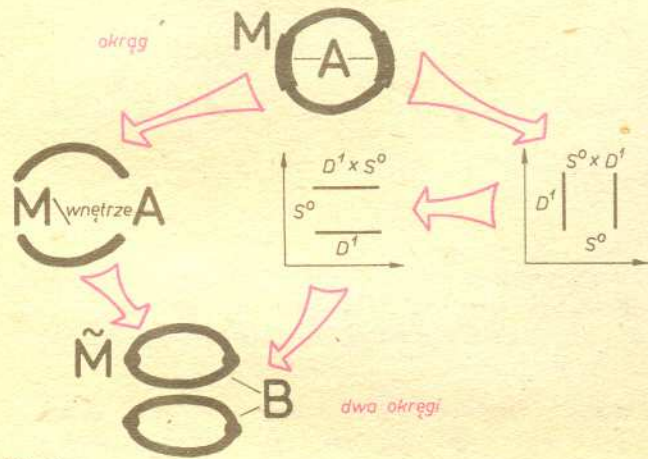


Rys. 1

Podobne twierdzenia, dające klasyfikację różności wyższego wymiaru, są znacznie trudniejsze i wymagają dość wyrafinowanych środków technicznych. Jedno z takich narzędzi, zwane chirurgią, spróbujemy tu opisać.

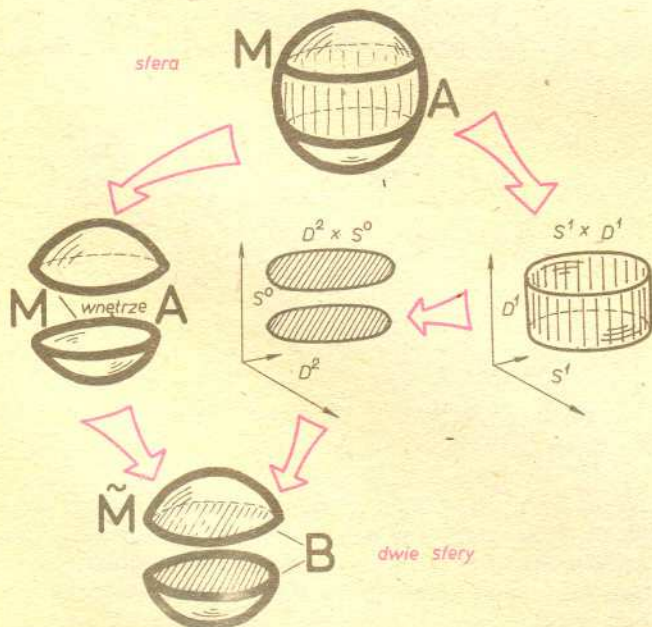
W ogólnym przypadku chirurgia polega na tym, że w n -wymiarowej różności M wybieramy podzbiór A homeomorficzny z iloczynem kartezjańskim p -wymiarowej sfery S^p i $q+1$ -wymiarowej kuli D^{q+1} , przy czym $p+q+1 = n$. Brzegiem zbioru A jest iloczyn $S^p \times S^q$. Usuamy teraz z M wewnątrz zbioru A i wklejamy inny zbiór $B = D^{p+1} \times S^q$; brzegiem B jest również $S^p \times S^q$, a wzdłuż niego właśnie kleimy. Otrzymaną w ten sposób nową różność \tilde{M} nazywamy wynikiem chirurgii typu (p, q) .

A oto kilka prostych przykładów. Gdy M jest okręgiem, musi być $p = q = 0$; pamiętajmy, że S^0 , czyli brzeg odcinka D^1 to po prostu dwa punkty.

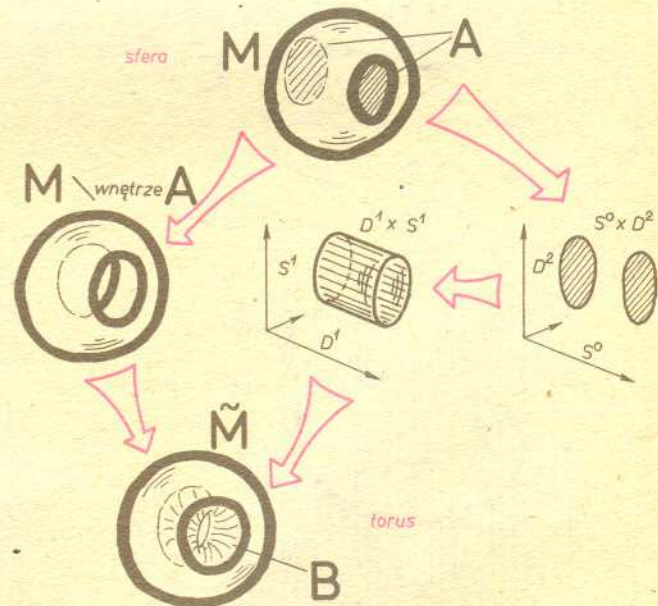


Rys. 2

Gdy M jest powierzchnią ($n = 2$), mamy już więcej swobody: oto przykłady chirurgii typu $(1,0)$ i $(0,1)$ dokonanych na sferze,

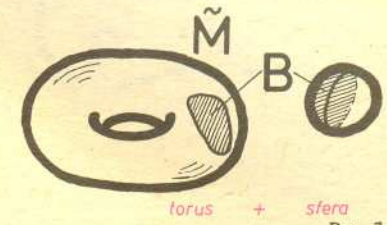
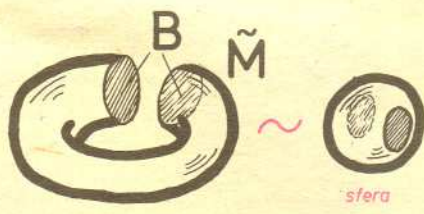
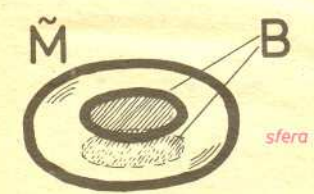
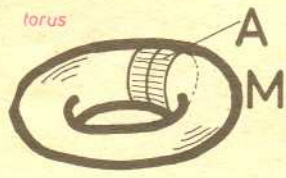
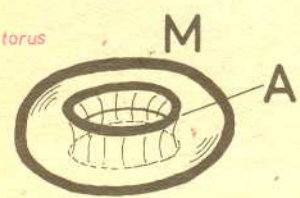


Rys. 3



Rys. 4

trzech chirurgii typu (1,0) na torusie,

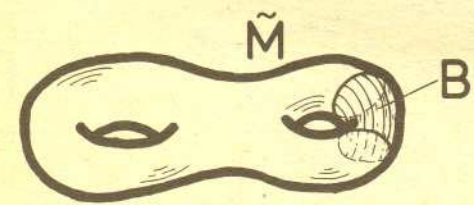
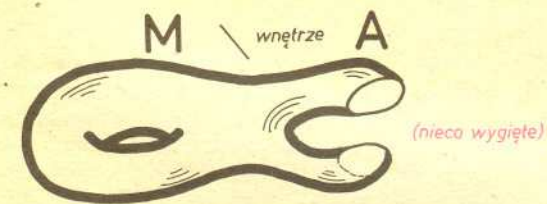


Rys. 5

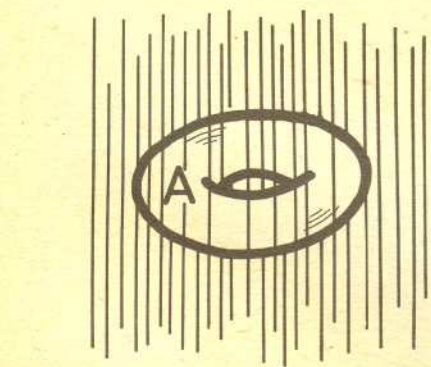
Rys. 6

Rys. 7

oraz chirurgii typu (0,1) na takim samym torusie.



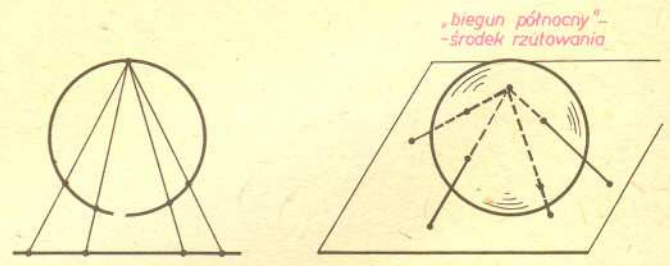
Rys. 8



Rys. 10

Zauważmy tutaj, że w pewnych przypadkach dwie chirurgie mogą być wzajemnie odwrotne: chirurgią typu (0,1) zrobiliśmy ze sfery torus — rysunek 4, gdy chirurgia typu (1,0) z rysunku 5 lub 6 robi z torusa sferę.

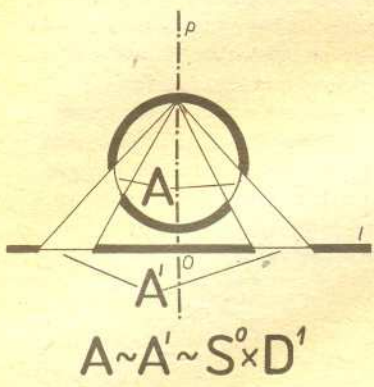
Znacznie trudniej wyobrazić sobie chirurgię na rozmaitościach trójwymiarowych. Już najprostszy przykład takiej rozmaitości — sfera S^3 — nie daje się narysować bezpośrednio. Warto jednak przypomnieć sobie znany z kartografii rzut stereograficzny, dzięki któremu na płaszczyźnie można przedstawić mapę sfery bez jednego punktu. Rysując analogiczny rzut okręgu na prostą można sobie wyobrazić, że przechodząc do wymiaru 3 otrzymamy rzut sfery trójwymiarowej bez punktu na trójwymiarową przestrzeń.



Rys. 9

Najciekawszym przykładem chirurgii trójwymiarowej jest chirurgia typu (1,1). Zbiorem A będzie (pełny) torus $S^1 \times D^2$ przedstawiony na rysunku 10. Czym jest jego dopełnienie (zbiór zakreślony na rysunku 10, przedstawiającym sferę trójwymiarową w rzucie stereograficznym, a więc przestrzeń R^3)? Okazuje się, o czym spróbujemy się przekonać, że otrzymamy znowu pełny torus.

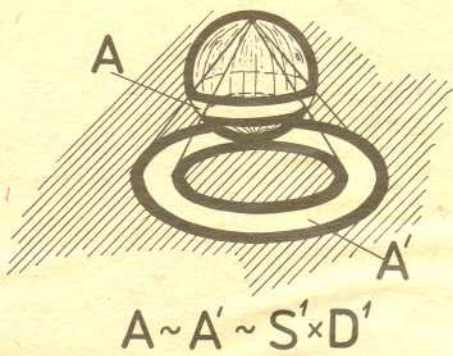
Pomoże nam w tym następny rysunek przedstawiający analogię naszej konstrukcji w przypadku dwuwymiarowym.



Obracamy nasz rysunek wokół osi p .
Otrzymujemy w ten sposób sferę rzutowaną stereograficznie na płaszczyznę powstającą z obrotu prostej l wokół punktu O .

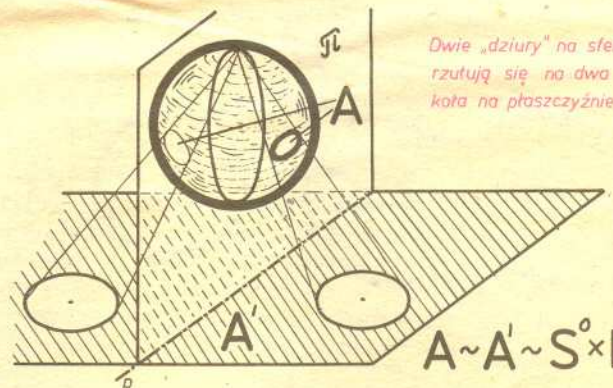
$$A \sim A' \sim S^0 \times D^1$$

Rys. 11



$$A \sim A' \sim S^1 \times D^1$$

Jedyną trudnością jest wyobrażenie sobie, co powstanie z zakreskowanej części sfery dwuwymiarowej z rysunku 12, gdy zaczniemy ją „obracać”. Gdy jednak zauważymy, że „obracamy” zbiór homeomorficzny z powierzchnią walcową, przy czym jeden jej równoleżnik pozostaje ustalony (jest to przecięcie sfery z płaszczyzną π), możemy narysować torus wypełniony rodziną powierzchni stożkowych (w szczególnych przypadkach będzie to powierzchnia walcowa i pierścień kołowy, mające wspólny okrąg).

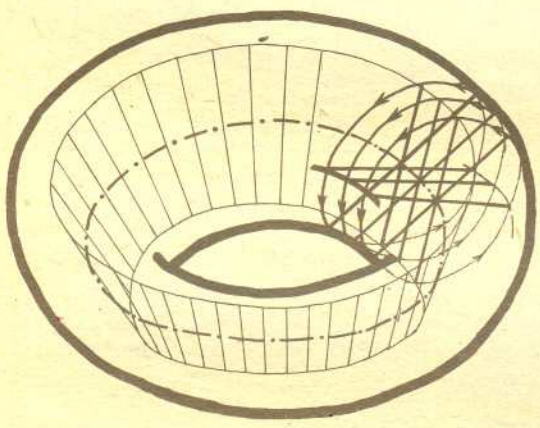


Dwie „dziury” na sferze rzutują się na dwa koła na płaszczyźnie.

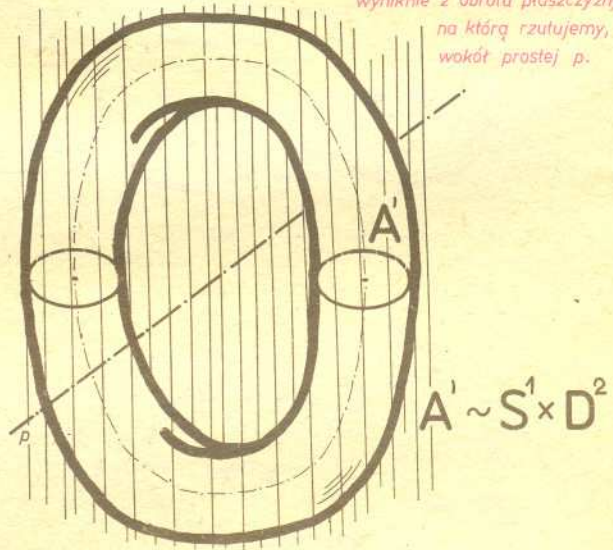
$$A \sim A' \sim S^0 \times D^2$$

Rysunek musielibyśmy obrócić w przestrzeni czterowymiarowej wokół płaszczyzny π . Możemy jedynie narysować to, co

wyniknie z obrotu płaszczyzny, na którą rzutujemy, wokół prostej p .



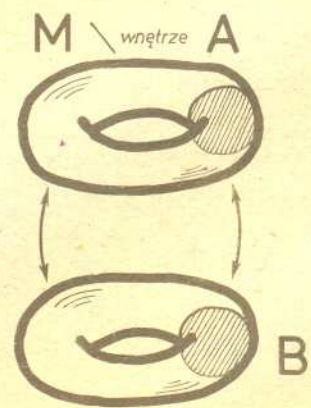
Rys. 13



$$A' \sim S^1 \times D^2$$

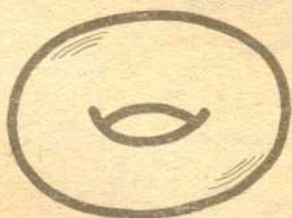
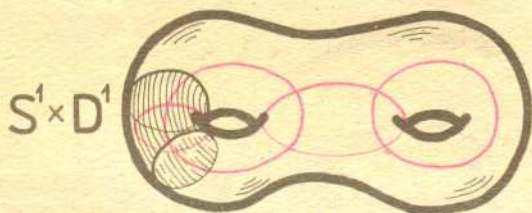
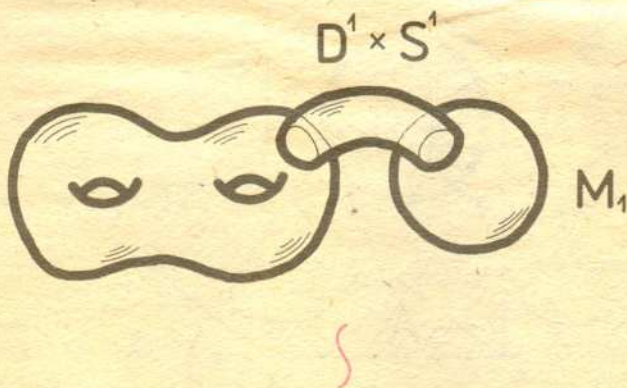
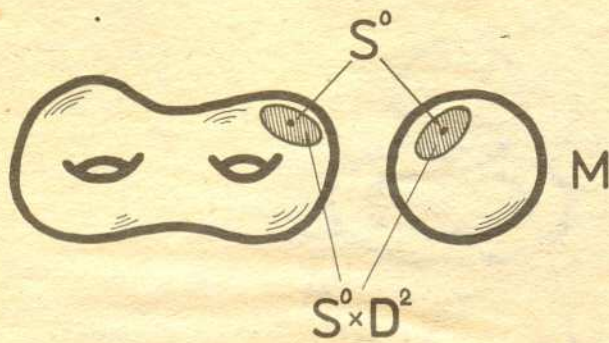
Rys. 12

Pozostaje już tylko opis drugiego stadiumu chirurgii: do torusa $T = S^3 \setminus (S^1 \times D^2)$ musimy dokleić znowu torus $B = D^2 \times S^1$. Tym razem doklejenie wygląda tak, że utożsamiamy punkt z powierzchni torusa T z jego lustrzanym odbiciem na powierzchni B . W rezultacie z dwóch zakreskowanych na rysunku 14 kół skleamy jedną dwuwymiarową sferę; sklejenie takie odbywa się nad każdym punktem okręgu będącego „rdzeniem” torusa — otrzymujemy ostatecznie iloczyn kartezjański $\tilde{M} = S^1 \times S^2$.



sklejenie

Rys. 14



Rys. 15

Opisana tu chirurgia typu (1,1) ma pewną szczególną cechę: usuwany torus A i wklejany torus B są homeomorficzne. Różnica między rozmaitością M i \tilde{M} polega na różnych sposobach sklejanja — różnych utożsamieniach powierzchni torusa z nią samą. Gdy jeszcze dodamy możliwość różnego położenia A w sferze S^3 (mógł on być np. zawiązany w węzeł), otrzymamy wielką różnorodność możliwych chirurgii, zwanych chirurgiami Dehna. Stanowią one bardzo precyzyjne, choć trudne w użyciu narzędzie do badania rozmaitości trójwymiarowych, używane m.in. w ostatnio przedsięwziętej przez Anglika Rourke i Portugalczyka Rêgo próbie dowodu znanej od 87 lat hipotezy Poincarégo.

W *Delcie* nr 8/1986 informowaliśmy o udowodnieniu liczącej ponad 80 lat hipotezy Poincarégo. Dowód okazał się bardzo trudny i do chwili obecnej nie ma pewności, czy jest on poprawny.

Warto może jeszcze przedstawić ogólną ideę wykorzystania chirurgii. Używamy jej do „upodobniania do siebie” zadanej pary rozmaitości. Wyobraźmy sobie na przykład, że z sumy precla i sfery przedstawionej na rysunku 15 pragniemy zrobić torus. Zauważamy przede wszystkim, że na M znajdują się dwa punkty, których nie potrafimy połączyć łukiem. Dwa punkty to jednak S^0 , a ich otoczenie to $S^0 \times D^2$, a więc można przeprowadzić chirurgię, której wynikiem jest spójna już rozmaitość M_1 — czyli precel.



Rys. 16

Precel ten różni się jednak jeszcze od torusa: mamy na nim cztery pętle (zbiory homeomorficzne z okręgami), przecinające się w pojedynczych punktach i takie, których nie można ściągnąć do punktu nie opuszczając przy tym powierzchni. Na torusie pętli takich można znaleźć dwie (rys. 16). Wybieramy więc jedną z dwóch „zbytecznych” pętelek, bierzemy jej otoczenie — tym razem ma ono postać $S^1 \times D^1$ i wykonujemy chirurgię. Jej wynikiem jest torus.

W ogólnym przypadku historia komplikuje się nieco, można jednak efektywnie wyznaczyć pewien obiekt algebraiczny — tzw. przeszkodę do chirurgii stanowiącą pewne kryterium rozróżnienia, a więc klasyfikacji. W rezultacie topologiczne zagadnienie porównania dwóch rozmaitości sprowadza się do problemu wyliczenia pewnego elementu pewnej grupy — a to jest właśnie celem rachunków znanych pod nazwą topologii algebraicznej.