O liczbie osi symetrii wielokąta

Dr hab. Edmund PUCZYŁOWSKI

Rozważając wielokąty o niewielkiej liczbie boków łatwo spostrzec, że liczba osi symetrii, jeśli tylko jest niezerowa, dzieli liczbę boków. Czy jest to prawda ogólna? Tak, i to właśnie chcemy udowodnić.

Niech więc dany będzie n-kąt W i niech I będzie zbiorem jego izometrii. Zauważmy, że

1° jeśli $f, g \in I$, to $f \circ g \in I$ oraz $f^{-1} \in I$;

2° dowolna izometria przeprowadza wierzchołki na wierzchołki, przy czym wierzchołki sąsiednie przechodzą na sąsiednie. Co więcej, izometria jest wyznaczona jednoznacznie przez wartości na dowolnej ustalonej parze wierzchołków sąsiednich, tzn. jeśli $f, g \in I$ oraz P_1, P_2 są wierzchołkami sąsiednimi i $f(P_1) = g(P_1)$ oraz $f(P_2) = g(P_2)$, to $f = g$.

Z 2° wynika, że zbiór I można utożsamiać z pewnym zbiorem przekształceń zbioru wierzchołków W. To w szczególności oznacza, że zbiór I jest skończony.

Powiemy, że sąsiednie wierzchołki P_1, P_2 są **kolejne**, gdy obiegając brzeg W w kierunku ruchu wskazówek zegara po przejściu przez P_1 napotykamy jako następny wierzchołek P_2. Mówimy, że $f \in I$ **zachowuje orientację**, gdy $f(P_1), f(P_2)$ są kolejne, o ile tylko P_1, P_2 są kolejne. Nietrudno spostrzec, że powyższa definicja jest poprawna, tzn. nie zależy od wyboru pary kolejnych wierzchołków.

Oznaczmy przez Z zbiór izometrii zachowujących orientację, a przez S zbiór pozostałych izometrii. Zauważmy, że

3° i) przekształcenie tożsamościowe id należy do Z;
ii) jeśli $f, g \in Z$, to $f \circ g \in Z$ oraz $f^{-1} \in Z$;
iii) jeśli $f \in Z$ i $g \in S$, to $f \circ g \in S$;
iv) jeśli $f, g \in S$, to $f \circ g \in Z$.

Może się zdarzyć, że zbiór S jest pusty. Jeśli jednak zbiór ten nie jest pusty, to ma on tyle samo elementów co zbiór Z. Załóżmy bowiem, że $s \in S$. Wówczas na podstawie 3° iii) mamy $f \circ s \in S$ dla $f \in Z$. Przy tym jeśli $f_1 \circ s = f_2 \circ s$, to $f_1 = (f_1 \circ s) \circ s^{-1} = (f_2 \circ s) \circ s^{-1} = f_2$. Każdemu więc elementowi $f \in Z$ przyporządkowujemy dokładnie jeden element $f \circ s \in S$. Jeśli jednak $s_1 \in S$, to na podstawie 3° ii) i 3° iv) mamy $s_1 \circ s^{-1} \in Z$. Teraz $(s_1 \circ s^{-1}) \circ s = s_1$. W wyniku opisanej operacji każdy element z S został przyporządkowany pewnemu elementowi zbioru Z. Zbiory Z i S mają więc tyle samo elementów.

Oczywiście dowolna symetria należy do S. Odwrotnie: jeśli $s \in S$, to dla pewnego wierzchołka P mamy $s(P) \neq P$. Nietrudno teraz spostrzec, że s jest symetrią względem symetralnej odcinka $Ps(P)$. W efekcie, jeśli tylko W ma jakąś oś symetrii, to ich liczba jest równa liczbie elementów zbioru Z. Zajmijmy się więc dokładniejszym zbadaniem tego zbioru.

Zauważmy, że

4° dowolna izometria z Z jest wyznaczona przez dowolny ustalony wierzchołek W. Dokładniej, jeśli P jest wierzchołkiem i dla pewnych $f, g \in Z$ mamy $f(P) = g(P)$, to $f = g$.

5° jeśli $f \in Z$, a P, Q są dowolnymi wierzchołkami, to $f(P)$ jest k-tym licząc od P w kierunku ruchu wskazówek zegara wierzchołkiem wtedy i tylko wtedy, gdy $f(Q)$ jest k-tym wierzchołkiem licząc od Q w tym samym kierunku. Liczba k zależy więc tylko od f. Oznaczmy ją $l(f)$. (Przyjmujemy tutaj, że $l(f)$ jest liczbą dodatnią, a więc $l(id) = n$.)

6° przekształcenie f, dla którego $l(f)$ przyjmuje wartość minimalną, można scharakteryzować w ten sposób, że przy przejściu od dowolnego wierzchołka P do $f(P)$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara nie napotykamy dla żadnego $g \in Z$ wierzchołka $g(P)$.

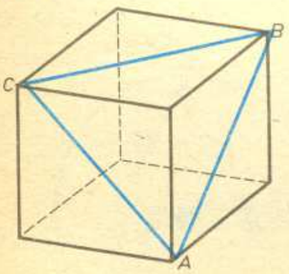
Z opisanych własności zbioru Z wynika, że elementy tego zbioru można ustawić w ciąg $f = f_1, f_2, \ldots, f_r = id$ w taki sposób, że $l(f_1) < l(f_2) < \ldots < l(f_r) = n$. Ponieważ dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant r-1$ i dowolnego wierzchołka P, przechodząc od $f_i(P)$ do $f_{i+1}(P)$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara, dla żadnego $g \in Z$ nie napotykamy wierzchołka $g(P)$ oraz $(f_{i+1} \circ f_i^{-1})(f_i(P)) = f_{i+1}(P)$, więc na podstawie 6° wnioskujemy, że $f_{i+1} \circ f_i^{-1} = f$. Zatem

$$f_i = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{i \text{ razy}} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant r \text{ oraz } l(f_i) = i \cdot l(f).$$

W szczególności $n = l(f_r) = r \cdot l(f)$. Oznacza to, że liczba elementów zbioru Z, a więc i liczba symetrii W, jeśli nie jest równa zeru, to dzieli n.

Rozwiązanie zadania M 457. Użyjemy dwumianu Newtona. Z jednej strony oczywiście $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1+n\cdot\frac{1}{n} = 2$, z drugiej zaś $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{2n} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{(2n)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{(2n)^3} + \ldots + \frac{1}{(2n)^n} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n} < 2$.

Rozwiązanie zadania M 458. Wystarczy zauważyć, że pole każdego rzutu prostopadłościanu jest dwukrotnie większe od pola rzutu trójkąta ABC (jak na rysunku). Wobec tego pole jest maksymalne, gdy płaszczyzna, na której leży trójkąt, jest równoległa do płaszczyzny rzutu.



Rozwiązanie zadania M 459.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(\xi \geqslant n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k} \mathrm{P}(\xi = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot \mathrm{P}(\xi = k) = E\xi.$$

Zmiana kolejności sumowania jest dopuszczalna, bo sumowane wyrazy są nieujemne.