Danił Granin, pisarz radziecki, w książce *Naprzeciw burzy* (PIW, 1964 r.) opisuje życie naukowców końca lat pięćdziesiątych podczas ówczesnej odnowy. Zamieszcza w niej (str. 280) następującą wypowiedź (z którą się, rzecz jasna, nie solidaryzuje):

— *Wszyscy ci uczeni siedzą na karku państwa i tylko piją krew. Taki ci przychodzi do pracy, kiedy ma ochotę. Warto by ich do kopalni... Od dwóch lat się grzebią, a gdzie produkcja? Żebym miał władzę, to bym ich wszystkich... Najpierw oczywiście po linii partyjnej.*

Aby z takimi wypowiedziami można się było spotkać tylko w opowieściach o czasie minionym,

Czytelnikom i sobie życzy

Delta

Linijka, cyrkiel i przybliżone rozwiązania wielkich problemów

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Najstarszymi przyrządami, którymi posługiwano się w geometrii, były linijka i cyrkiel (ten ostatni pojawił się później, ale gdzie i kiedy — nie wiadomo). Pozwalają one na:

1. kreślenie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty,
2. kreślenie okręgów o środku w danym punkcie i promieniu równym odległości danych dwóch punktów,
3. wyznaczanie punktów wspólnych linii otrzymanych według powyższych zasad.

Konstrukcyjne wyznaczenie jakiegoś punktu (gdy dany jest pewien zbiór punktów) polega na wykonaniu skończonej liczby kroków opisanych w 1, 2, 3. Dzisiaj konstrukcje takie nazywamy platońskimi lub klasycznymi.

W roku 1637 René Descartes (Kartezjusz, 1596—1650) zapowiedział nierozerwalny związek geometrii z algebrą kładąc podwaliny pod geometrię analityczną i algebraiczną. Stanowiło to punkt wyjścia ogólnej teorii wielomianów i opartej na niej algebraicznej teorii konstrukcji geometrycznych. Tej ostatniej pełny kształt nadali matematycy XIX wieku — P. Ruffini, N. Abel, E. Galois, P. Wantzel, F. Lindemann. Wskazali oni ogólne twierdzenia podające warunki konieczne lub dostateczne na to, aby konstrukcje platońskie były wykonalne oraz dowiedli, że nie wszystkie punkty można otrzymać konstrukcyjnie (patrz M. Bryński, L. Włodarski, *Konstrukcje geometryczne*, Biblioteczka Delty nr 1, WSiP, Warszawa 1979).

Zagadnienie warunków konstruowalności cyrklem i linijką stanowi tylko część problematyki związanej z konstrukcjami geometrycznymi. Już sami Grecy poszukując rozwiązań prezentowanych niżej problemów uciekali się (i to z wielkim powodzeniem) do użycia krzywych bardziej skomplikowanych niż okręgi i proste lub używali innych przyrządów. Ich konstrukcje są tak wzorowe, że późniejsze pokolenia niewiele mogły je udoskonalić. Próbowano też konstrukcji środkami uboższymi niż platońskie. Konstrukcjami posługującymi się tylko cyrklem zajmował się matematyk duński Georg Mohr (1640—1697). Popularność zyskały one dopiero w 1797 roku dzięki pracy L. Mascheroniego (1750—1800). Idee Mohra i Mascheroniego pozwoliły sformułować i udowodnić twierdzenie, że każda konstrukcja wykonalna za pomocą cyrkla i linijki jest też wykonalna samym cyrklem. Konstrukcje z użyciem samej linijki okazały się mniej efektywne. Jakub Steiner (1796—1863) wykazał w 1833 roku, że każdą konstrukcję klasyczną można wykonać za pomocą samej linijki, jeżeli na płaszczyźnie dany jest pewien okrąg oraz jego środek (patrz H. Rademacher, O. Toeplitz, *O liczbach i figurach*, PWN, Warszawa 1956, str. 221—235).

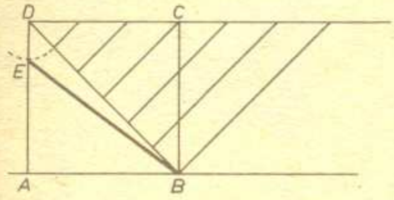
Potrafimy uzyskać dokładne (teoretycznie) konstrukcje
podwojenia sześcianu za pomocą paraboli,
trysekcji kąta za pomocą konchoidy Nikodemesa lub ślimaka Pascala,
rektyfikacji okręgu i kwadratury koła za pomocą kwadratrysy Hippiasza.

Po tych dygresjach wróćmy do konstrukcji platońskich. Oczywisty jest fakt, że żaden rysunek nie jest konstrukcją dokładną. Kreśląc otrzymujemy przedmioty fizyczne, np. „punkty" w kształcie kropek, „odcinki", „łuki" mające grubość. Musimy zatem odróżniać rozwiązania teoretyczne od ich praktycznej realizacji. W fazie analizy teoretycznej udzielamy odpowiedzi na pytania:

1. Czy istnieje konstrukcyjne rozwiązanie danego problemu, jeżeli tak, to jak ono wygląda?

2. W przypadku odpowiedzi negatywnej, jakie jest konstrukcyjne przybliżone rozwiązanie tego problemu?

Właśnie takie, teoretycznie przybliżone konstrukcje nazywamy „konstrukcjami przybliżonymi" (nie należy tego terminu mylić z praktyczną realizacją konstrukcji).



Rys. 1

Jak wiadomo z rozważań XIX-wiecznych matematyków, szereg zagadnień starożytności nie jest wykonalnych linijką i cyrklem. Można je rozwiązać dokładnie używając krzywych algebraicznych lub wykonać konstrukcje przybliżone. Poniżej sformułujemy kilka takich zagadnień oraz wskażemy ich przybliżone rozwiązania za pomocą konstrukcji platońskich.

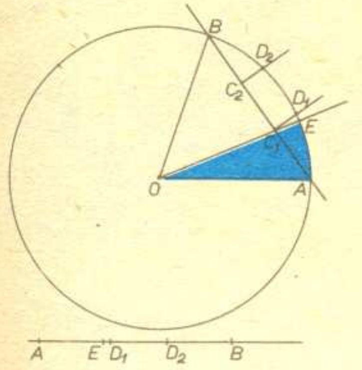
A. Podwojenie sześcianu — wyznaczyć krawędź sześcianu, którego objętość jest dwa razy większa od objętości danego sześcianu.

Konstrukcja Bunofalcego. Daną mamy ścianę $ABCD$ sześcianu o krawędzi a (rys. 1). Dzielimy przekątną DB na sześć równych odcinków. Na boku DA odkładamy odcinek $DE = \frac{1}{6} DB$. Wówczas

$$EB = \sqrt{AB^2+(AD-ED)^2} = \frac{1}{6} AB\sqrt{74-12\sqrt{2}}.$$

Wykonując obliczenia z dokładnością do pięciu cyfr po przecinku i porównując wynik z dokładną wartością liczby $\sqrt[3]{2}\cdot a$ mamy:

$$0{,}001\cdot a < \sqrt[3]{2}\cdot a - EB < 0{,}002\cdot a.$$



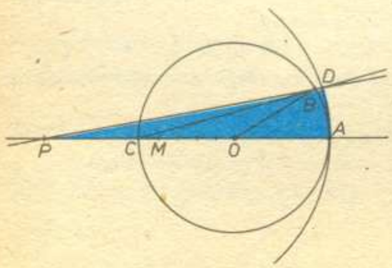
Rys. 2

Albrecht Dürer (1471—1528) — niemiecki malarz, rzeźbiarz, architekt.

B. Trysekcja kąta — podział dowolnego kąta na trzy równe części.

1. Konstrukcja Albrechta Dürera. Dany mamy kąt ostry $\sphericalangle\, AOB$, który będzie kątem środkowym okręgu $o(O, AO)$ (rys. 2). Dzielimy odcinek AB na trzy równe części: $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$. W punktach C_1, C_2 prowadzimy prostopadłe do AB, które przecinają łuk $\breve{AB}$ w punktach D_1, D_2. Budujemy teraz sumę odcinków AD_1, D_1D_2, D_2B i znajdujemy trzecią część tej sumy. Odkładamy cięciwę AE równą otrzymanemu odcinkowi. Wtedy $\sphericalangle\, AOE \approx \frac{1}{3} \sphericalangle\, AOB$ i błąd jest mniejszy niż 18″, a ponadto maleje on, gdy kąt zbliża się do zera. Konstrukcja ta ma piękną myśl przewodnią: punkty D_1, D_2 dzielą łuk $\breve{AB}$ na nierówne części. Gdybyśmy przyjęli którąkolwiek cięciwę AD_1, D_1D_2, D_2B za cięciwę odpowiadającą trzeciej części kąta $\sphericalangle\, AOB$, to popełnilibyśmy duży błąd. Aby go zmniejszyć — poszukujemy cięciwy AE, której długość jest średnią arytmetyczną długości cięciw AD_1, D_1D_2, D_2B.

Dla małych kątów (mniejszych od 22° 30′) bardzo dokładna jest



Rys. 3

2. Konstrukcja Finslera. Dany mamy kąt $\sphericalangle\, AOB$, $AO = BO$ (rys. 3). Odkładamy punkt C tak, by był on końcem średnicy AC okręgu $o(O, AO)$. Na przedłużeniu OC odkładamy $CP = OA$ oraz odcinek $OM = \frac{4}{5} OA$. Okrąg $o_1(M, MA)$ przecina półprostą CB w punkcie D. Kąt $\sphericalangle\, DPA$ możemy uważać za trzecią część kąta $\sphericalangle\, AOB$ (błąd nie przekracza tu 0,074″).

C. Rektyfikacja okręgu — wyznaczenie odcinka o długości równej długości danego okręgu.

1. Konstrukcja Spechta. Do okręgu $o(O, OA)$ kreślimy styczną w punkcie A (rys. 4). Na stycznej odkładamy odcinki $AB = \frac{11}{5} OA$, $AC = \frac{13}{5} OA$. Na półprostej AO odkładamy odcinek $AD = OB$. Z punktu D prowadzimy równoległą do OC. Wtedy

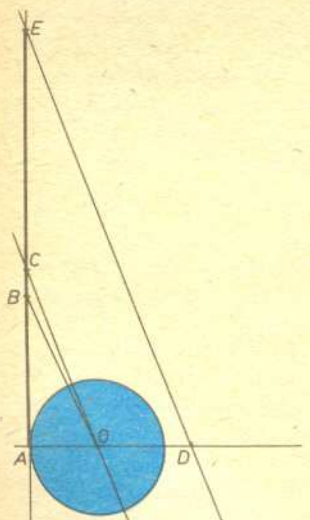
$$AD = OB = \sqrt{OA^2+\frac{121}{25}\cdot OA^2} = \frac{\sqrt{146}}{5}\cdot OA, \quad \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AO},$$

więc

$$AE = \frac{13}{25}\sqrt{146}\cdot OA \approx 6{,}2831839\cdot OA.$$

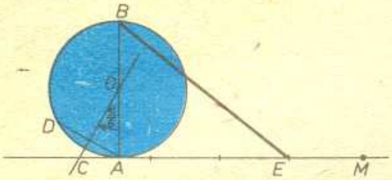
Długość odcinka AE różni się od długości okręgu o mniej niż $0{,}000002\cdot OA$.

Konstrukcja ta jest teoretycznie bardzo dokładna, ale mało dogodna w stosowaniu. Technicznie prostsza jest



Rys. 4

Adam Adamandy Kochański (1631—1700) — Polak, nadworny matematyk króla Jana III Sobieskiego, bibliotekarz w Wilanowie.



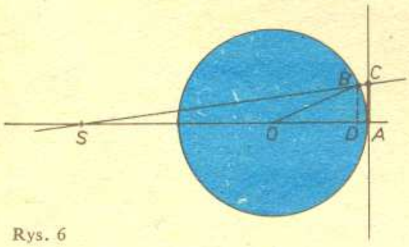
Rys. 5

2. Konstrukcja Adama A. Kochańskiego z 1685 roku. Do okręgu $o(O,\ OA)$ kreślimy w punkcie A styczną AM (rys. 5) oraz cięciwę $AD = AO$. Z punktu O kreślimy prostą przechodzącą przez środek cięciwy AD. Przecina ona styczną w punkcie C. Na tej stycznej odkładamy odcinek $CE = 3 \cdot OA$. Wtedy

$$CA = \frac{\sqrt{3}}{3}\,OA,\quad AE = \left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot OA \ \text{ i } \ BE = \sqrt{\frac{40}{3}-\sqrt{12}}\cdot OA \approx 3{,}1415333\cdot OA.$$

Zatem odcinek BE różni się od połowy długości okręgu o mniej niż $0{,}00006 \cdot OA$.

D. Rektyfikacja łuku — zbudowanie odcinka, którego długość równa się długości danego łuku $\breve{AB}$ okręgu $o(O,\ OA)$ odpowiadającego kątowi środkowemu ostremu $\sphericalangle\ AOB$.



Rys. 6

Podamy rozwiązanie przybliżone dla kątów $\sphericalangle AOB$ nie przekraczających 30°. Na prostej AO (rys. 6) odkładamy odcinek $OS = 2 \cdot OA$ i styczną do okręgu w punkcie A. Następnie prowadzimy prostą przechodzącą przez punkty S i B, która na stycznej wyznacza punkt C. Wówczas jeżeli α jest miarą łukową kąta $\sphericalangle AOB$, to

$$|\breve{AB}| = \alpha \cdot OA,\ \ SD = 2\cdot OA + OD = (2+\cos\alpha)\cdot OA,$$

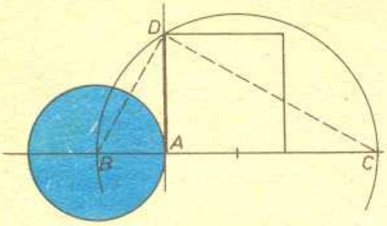
$$BD = \sin\alpha \cdot OA,\ \text{ a } \ \frac{AC}{DB} = \frac{AS}{DS} = \frac{3}{2+\cos\alpha}.$$

Stąd $AC = \dfrac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha}\cdot OA$. Dla $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ długość łuku $\breve{AB}$ różni się od długości odcinka AC o mniej niż $0{,}0005 \cdot |\breve{AB}|$.

Dla kątów ostrych większych od 30° możemy każdy taki kąt zapisać w postaci $30°+\beta$ lub $2\cdot 30°+\beta$, gdzie $\beta < 30°$, i wykonać rektyfikację każdego z tych łuków oddzielnie. Wtedy błąd względny takiej konstrukcji jest mniejszy niż 0,0015.

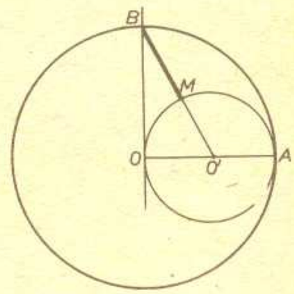
E. Kwadratura koła — wyznaczyć taki odcinek, aby pole kwadratu zbudowanego na tym odcinku było równe polu koła o danym promieniu.

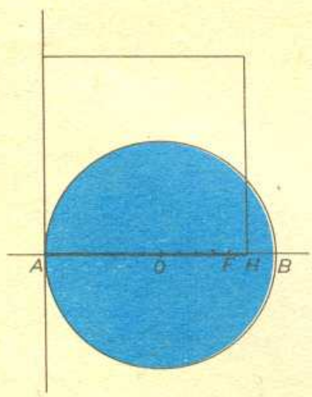
1. Możemy to wykonać wykorzystując np. rektyfikację Kochańskiego, co obrazuje rysunek 7. Odcinek AB jest promieniem okręgu, a odcinek AC połową długości okręgu.



Rys. 7

Złotym podziałem odcinka nazywamy taki podział odcinka o długości a na dwa odcinki o długościach x i $a-x$, że $a:x = x:(a-x)$, stąd $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a$. Odcinek o długości x nazywamy złotą częścią odcinka o długości a. Konstrukcja takiego podziału znana była już Starożytnym. Oto konstrukcja Herona z Aleksandrii (I wiek n.e.). Dany mamy odcinek OA. Budujemy okrąg $o(O,\ OA)$. Na odcinku OA jako na średnicy kreślimy okrąg $o_1\left(O',\ \frac{1}{2}OA\right)$ i z punktu O wyznaczamy prostopadłą $OB = OA$ do odcinka OA. Odcinek $O'B$ przecina okrąg o_1 w punkcie M. Z twierdzenia Pitagorasa łatwo można sprawdzić, że $BM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot OA$. Jest to zatem złota część odcinka OA.



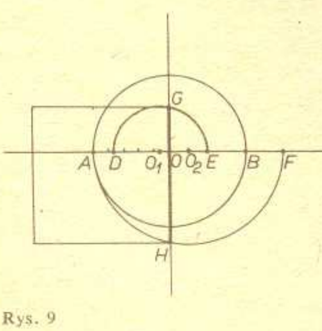


Rys. 8

2. Dany mamy okrąg $o(O,\ OA)$ oraz jego średnicę AB (rys. 8). Na odcinku OB odkładamy odcinek OF równy złotej części odcinka OA, a następnie odcinek $FH = \dfrac{1}{4}OF$. Wtedy AH jest bokiem kwadratu, którego pole różni się od pola koła ograniczonego okręgiem $o(O,\ OA)$ o mniej niż $0{,}001 \cdot OA^2$. Obliczmy

$$AH = OA + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot OA + \frac{\sqrt{5}-1}{8}\cdot OA = \frac{5\sqrt{5}+3}{8}\cdot OA \approx 1{,}7725423\cdot OA.$$

Zatem różnica między AH a $\sqrt{\pi}\cdot OA$ nie przekracza wartości $0{,}0001 \cdot OA$.



Rys. 9

3. Dany mamy okrąg $o(O,\ OA)$ oraz punkty A, B będące końcami średnicy (rys. 9). Tworzymy odcinki $OD = \dfrac{3}{5}\cdot OA$, $OF = \dfrac{3}{2}\cdot OA$ i punkt E jako środek odcinka OB. Następnie na odcinkach DE i AF jako na średnicach budujemy półokręgi po przeciwnych stronach. Prostopadła do AB poprowadzona w punkcie O przecina te półokręgi w punktach G i H. Odcinek GH różni się od $\sqrt{\pi}\cdot OA$ o mniej niż $0{,}00002 \cdot OA$ (wystarczy zauważyć, że $OG^2 = OD \cdot OE$, $OH^2 = OA \cdot OF$).

Mimo tego, że kwadratury koła nie można wykonać środkami klasycznymi, istnieją figury ograniczone łukami okręgów (tzw. księżyce Hipokratesa z V wieku p.n.e.), dla których jest to możliwe.