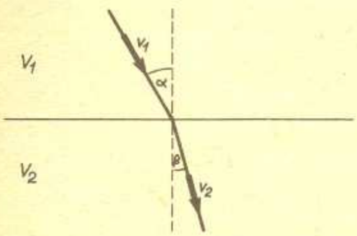
Kiedy światło biegnie po okręgu?

Jacek DAMEK

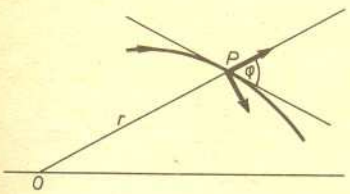
Nasze poszukiwania ośrodków optycznych, w których możliwie dużo promieni świetlnych ,,zatacza'' okręgi, będą po trosze przypominały postępowanie magika wyciągającego królika z kapelusza. Tym królikiem będą pewne zasady optyki geometrycznej, a kapeluszem powszechnie znane prawa mechaniki.



Rys 1. Przejście cząstki przez barierę potencjału.

Zaczniemy od rozpatrzenia dwóch obszarów rozdzielonych płaszczyzną, w których dana cząstka przyjmuje energię potencjalną równą odpowiednio V_1 i V_2 (rys. 1). Podczas przejścia cząstki przez granicę obszarów zmienia się tylko jej składowa prędkości prostopadła do ,,bariery''. Mamy więc $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{E_{2\,kin}}{E_{1\,kin}}} = \sqrt{\frac{E-V_2}{E-V_1}}$,
gdzie E jest stałą podczas ruchu całkowitą energią cząstki. Wielkość $\sqrt{E-V(\boldsymbol{r})}$ odpowiada więc dokładnie optycznemu współczynnikowi załamania. Zrozumiałe jest teraz, że zasadzie Fermata w optyce (patrz *Delta* 6/1985), mówiącej, iż promień światła biegnie między punktami A i B po torze, wzdłuż którego całka $\int_A^B n(s)\,ds$ przyjmuje wartość ekstremalną, odpowiada w mechanice zasada Jacobiego, według której wzdłuż toru ciała $\int_A^B \sqrt{E-V(\boldsymbol{r})}\,ds = \text{extremum}$.

Z tego wynika, że jeśli ciało o energii E zakreśla w polu o potencjale $V(\boldsymbol{r})$ pewną krzywą, to po tej krzywej może biec światło w ośrodku o współczynniku załamania $n(\boldsymbol{r}) = \sqrt{E-V(\boldsymbol{r})}$ (z dokładnością do stałego czynnika).



Rys. 2

Na początek postaramy się ,,wyciągnąć'' pewną zasadę optyki geometrycznej z prawa zachowania momentu pędu w polu sił centralnych. Prawo to można zapisać w postaci $mvr\sin\varphi = \text{const}$, gdzie r jest odległością od centrum siły, m — masą ciała, v jego prędkością, a φ kątem między prędkością i promieniem wodzącym (rys. 2).

Z rozważań wstępnych wiemy, że $n(r) \sim \sqrt{E_{kin}} \sim v$, czyli zasadzie zachowania momentu pędu odpowiada w optyce zasada

$$nr\sin\varphi = \text{const};$$

jest to tzw. prawo Bouguera dla ośrodków o symetrii sferycznej, spełnione wzdłuż każdego promienia świetlnego.

Aby otrzymać równanie promienia świetlnego we współrzędnych biegunowych (r, θ), zauważymy, że $\sin\varphi = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta)+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$,
a następnie z prawa Bouguera

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{C}\sqrt{n^2r^2-C^2}, \qquad (1)$$

gdzie C — stała.

Z powyższego widać, że jeśli $n(r) = k/r$, to z dowolnego punktu ośrodka można wysłać promień, który będzie biegł po okręgu wokół punktu O.

Stanisław Lem w swojej pierwszej powieści fantastyczno-naukowej *Astronauci* umieścił wyjaśnienie przez chińskiego fizyka Lao Czu sytuacji, w której promienie światła biegną po okręgach (rozdział ,,Profesor Lao Czu''). Tam przyczyną tego zjawiska była bardzo silna grawitacja. Obok zamieszczamy opis podobnej sytuacji, ale mającej zupełnie inne przyczyny.

Omówimy teraz ośrodek, zwany ,,rybim okiem'', o współczynniku załamania $n(r) = \frac{n_0}{1+(r/a)^2}$, n_0 i a — stałe. Jego własności badał Maxwell.
Podstawiając $n(r)$ do (1) otrzymujemy po scałkowaniu

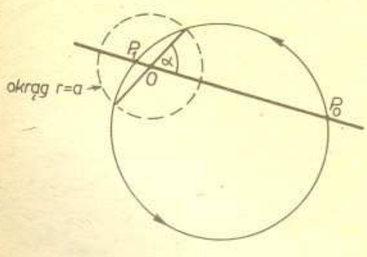
$$\theta = \int \frac{K(1+\varrho^2)\,d\varrho}{\varrho\sqrt{\varrho^2-K^2(1+\varrho^2)^2}}, \qquad (2)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia $\varrho = r/a$, $K = C/an_0$.

Łatwo wykazać, że

$$\frac{K(1+\varrho^2)}{\varrho\sqrt{\varrho^2-K^2(1+\varrho^2)^2}} = \frac{d}{d\varrho}\left[\arcsin\left(\frac{K}{\sqrt{1-4K^2}}\,\frac{\varrho^2-1}{\varrho}\right)\right],$$

możemy więc przepisać (2) w postaci $\sin(\theta-\alpha) = \frac{C}{\sqrt{a^2n_0^2-4C^2}}\,\frac{r^2-a^2}{ar}$,
gdzie α — stała całkowania.



Rys. 3. Promienie w ,,rybim oku'' Maxwella.

Dla jednoparametrowej rodziny promieni przechodzących przez punkt (r_0, θ_0) mamy

$$\frac{r^2-a^2}{r\sin(\theta-\alpha)} = \frac{r_0^2-a^2}{r_0\sin(\theta_0-\alpha)}.$$

Jak widać, przy dowolnej wartości parametru α równanie to jest spełnione przez $r_1 = a^2/r_0$ i $\theta_1 = \pi+\theta_0$, skąd wynika, że wszystkie promienie wysłane z dowolnego punktu P zbiegają się w punkcie P_1, leżącym na prostej łączącej P_0 i O; P_0 i P_1 położone są po przeciwnej stronie O, oraz $OP_0 \cdot OP_1 = a^2$ (rys. 3). Obraz punktu otrzymujemy więc przez inwersję.

Czytelnik sam sprawdzi na podstawie ostatniego wzoru, że każdy promień przecina okrąg $r = a$ w końcach jego średnicy.