Czy Księżyc jest satelitą Ziemi?

Dr Tomasz KWAST

Księżyc znajduje się w odległości $r_0 = 3{,}844 \cdot 10^8$ m od Ziemi o masie $m = 5{,}974 \cdot 10^{24}$ kg i w odległości $R = 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m od Słońca o masie $M = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg. Łatwo sprawdzić, że $m/r_0^2 < M/R^2$, a dokładniej: przyspieszenie Księżyca wywołane przez Słońce jest ponad dwukrotnie większe niż przyspieszenie wywierane przez Ziemię. W ogólności obszar przestrzeni, w którym przyspieszenie ze strony Ziemi dominuje nad przyspieszeniem ze strony Słońca, nazywamy strefą przyciągania Ziemi. Mówimy więc, że Księżyc znajduje się poza strefą przyciągania Ziemi. Skutkiem tego wokółsłoneczna orbita Księżyca jest wygięta stale w tę samą stronę — Słońce zawsze znajduje się po jej wklęsłej stronie. Wygląda to tak, jakby Księżyc był planetą, której ruch jest lekko zaburzany przez Ziemię. Tymczasem każdy widzi, że Księżyc jednak obiega Ziemię!

Dopóki mówimy tylko o kinematyce Księżyca, to obojętne jest, czy jego ruch przedstawimy jako geocentryczny perturbowany przez Słońce, czy heliocentryczny perturbowany przez Ziemię. Spodziewamy się jednak, że dynamika powinna podpowiedzieć, którą sytuację należy uznać za „prawdziwszą". Czyżby więc należało uznać Księżyc za planetę, skoro Słońce działa nań silniej niż Ziemia? Otóż nie. Zauważmy bowiem, że prawie takiemu samemu przyspieszeniu ze strony Słońca podlega Ziemia. Widocznie więc nie ma znaczenia, jakie rzeczywiście przyspieszenie Księżyca wywołuje Słońce, a tylko ważna jest różnica a_p między tym właśnie przyspieszeniem a_{KS} i przyspieszeniem Ziemi a_{ZS}, którą to różnicę nazwijmy przyspieszeniem perturbacyjnym. Ruch Księżyca można będzie uznać za geocentryczny (jedynie perturbowany przez Słońce), jeżeli jego przyspieszenie perturbacyjne ze strony Słońca będzie dostatecznie małe w porównaniu z przyspieszeniem centralnym, czyli tu ze strony Ziemi.

Ale, jak powiedzieliśmy, równie dobrze można opisywać ruch Księżyca jako heliocentryczny perturbowany przez Ziemię. Wtedy przyspieszeniem perturbacyjnym będzie różnica a_p między jego przyspieszeniem a_{KZ} wywołanym przez Ziemię i przyspieszeniem Słońca a_{SZ} wywołanym też przez Ziemię. Analogicznie ruch Księżyca uznalibyśmy za heliocentryczny, gdyby w tym ujęciu przyspieszenie perturbacyjne było dostatecznie małe w porównaniu z centralnym, czyli ze strony Słońca.

Widzimy więc, że dla obu wersji opisu ruchu Księżyca można utworzyć stosunek

$$\gamma = \frac{\text{przyspieszenie perturbacyjne}}{\text{przyspieszenie centralne}}$$

i jeżeli będzie on mniejszy w wersji geocentrycznej, to uznamy Księżyc za satelitę Ziemi, jeśli zaś większy, to za planetę. W ogólności obszar przestrzeni, w którym γ jest mniejsza w wersji planetocentrycznej niż heliocentrycznej, nazwiemy strefą oddziaływania planety.

Nietrudno jest znaleźć przybliżony wzór na rozmiar strefy oddziaływania. Kto nie ma na to ochoty, może kontynuować czytanie dopiero od słowa **ostatecznie**.

a. Opis geocentryczny (rys. 1).

$$a_p = a_{KS} - a_{ZS} = \left[-\frac{GM}{\varrho^2}\cos\psi - \frac{GM}{R^2},\ \frac{GM}{\varrho^2}\sin\psi \right].$$

Należy teraz uwzględnić, że $\cos\psi \cong 1$, $\sin\psi = \sin\varphi \dfrac{r}{\varrho}$, $\varrho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi$, następnie rozwinąć w szereg względem małej wielkości r/R i zachować tylko pierwsze jej potęgi. Dostaniemy wtedy

$$a_p = \frac{GMr}{R^3}[2\cos\varphi,\ \sin\varphi],$$

$$a_p = \frac{GMr}{R^3}\sqrt{1+3\cos^2\varphi},$$

$$\gamma_{geoc} = a_p \bigg/ \frac{Gm}{r^2} = \frac{M}{m}\frac{r^3}{R^3}\sqrt{1+3\cos^2\varphi}.$$

Rozwiązanie zadania F 213. Całkowita energia wypromieniowana przez kuliste ciało w ciągu jednostki czasu zgodnie ze wzorem Stefana-Boltzmanna wynosi

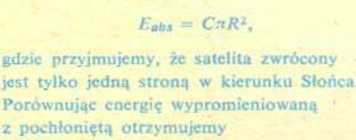
$$E = 4\pi R^2 \sigma T^4,\quad \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}\ K^{-4}}.$$

Jednocześnie powierzchnia satelity absorbuje promieniowanie cieplne pochodzące ze Słońca. Ponieważ przyjmujemy, że zdolność absorpcyjna powierzchni wynosi 1 (ciało doskonale czarne), to zgodnie z prawem Kirchhoffa moc promieniowania absorbowanego przez powierzchnię jest równa mocy promieniowania emitowanego przez nią, gdy jej temperatura równa jest temperaturze otoczenia. Wielkość energii zaabsorbowanej wyniesie więc

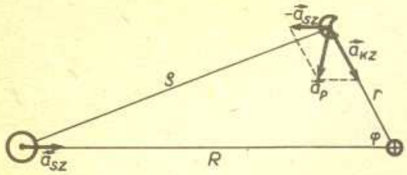
$$E_{abs} = C\pi R^2,$$

gdzie przyjmujemy, że satelita zwrócony jest tylko jedną stroną w kierunku Słońca. Porównując energię wypromieniowaną z pochłoniętą otrzymujemy

$$T = \sqrt[4]{C/(4\sigma)} \approx 280\ \mathrm{K}.$$



Rys. 1



Rys. 2

b. Opis heliocentryczny (rys. 2).

$$a_p = a_{KZ} - a_{SZ} = \left[\frac{Gm}{r^2}\cos\varphi - \frac{Gm}{R^2}, \frac{Gm}{r^2}\sin\varphi\right] \cong \frac{Gm}{r^2}[\cos\varphi, \sin\varphi]$$

$$a_p = \frac{Gm}{r^2},$$

$$\gamma_{\text{helioc}} = a_p \bigg/ \frac{GM}{R^2} = \frac{m}{M}\frac{R^2}{r^2}.$$

Przyrównując oba wyrażenia na γ dostajemy **ostatecznie** wzór na rozmiar strefy oddziaływania planety

$$r = R\sqrt[5]{\frac{m^2/M^2}{\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}}.$$

Podstawiwszy dane liczbowe stwierdzamy, że strefa oddziaływania Ziemi rozciąga się do odległości co najmniej 800 tys. km, a więc Księżyc jest stale wewnątrz niej. Oddychamy z ulgą — Księżyc rzeczywiście jest satelitą Ziemi. To samo zresztą dotyczy satelitów innych planet. Pojęcie strefy oddziaływania miało dawniej duże znaczenie praktyczne, np. przy numerycznym śledzeniu ruchu komet zbliżających się do Jowisza. Przy obliczeniach ręcznych cenne były wszelkie chwyty usprawniające rachunki. Określenie strefy oddziaływania dawało obiektywną wskazówkę, w którym momencie formalnie heliocentryczny ruch komety staje się jowicentrycznym i odwrotnie, czyli kiedy należy zmienić procedurę rachunkową. Obecnie, kiedy z zastosowaniem komputera można śledzić ruch komety ściśle w każdej chwili, nie ma to praktycznego znaczenia — pozostało nadal znaczenie poznawcze.

Moment bezwładności w geometrii

Radosław SZMYTKOWSKI

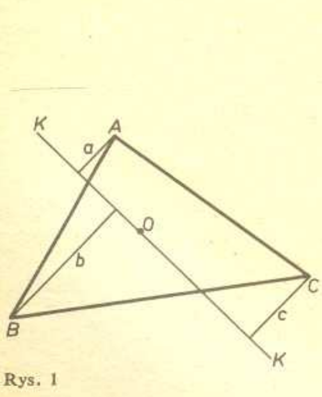
Pojęcie momentu bezwładności zostało wprowadzone do fizyki przez Eulera, gdy ten podawał równania ruchu bryły sztywnej. Od tej pory udowodniono wiele własności momentu, np. twierdzenie Steinera, twierdzenie o osiach prostopadłych, własność nierówności trójkąta i inne. Okazało się również, że pojęcie momentu bezwładności może być przydatne przy rozwiązywaniu problemów geometrycznych. Przedstawimy tu kilka zastosowań do figur płaskich. Pierwsze z nich dotyczy

Twierdzenia o siecznych przechodzących przez środek ciężkości trójkąta:

Jeżeli przez środek ciężkości trójkąta przeprowadzona jest prosta, to suma odległości od tej prostej dwóch wierzchołków trójkąta, znajdujących się po jednej stronie, równa jest odległości trzeciego wierzchołka od tej prostej.

Dowód. Zarówno w tym dowodzie, jak i w następnych będziemy korzystali z następującego faktu, który łatwo udowodnić: środek ciężkości trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości figury złożonej z trzech punktów materialnych o równych masach umieszczonych w wierzchołkach tego trójkąta.

Moment bezwładności wyżej opisanego układu punktów materialnych względem osi K przechodzącej przez środek ciężkości tego układu i leżącej w płaszczyźnie trójkąta jest dany wzorem



Rys. 1

(1) $$J_O = \frac{m}{3}(a^2+b^2+c^2),$$

gdzie a, b, c są odległościami odpowiednich wierzchołków od osi K, a m — suma mas (rys. 1). Moment bezwładności względem osi równoległej do K i przechodzącej przez punkt A jest dany wzorem $J_A = J_O + ma^2$. Z drugiej strony

(2) $$J_A = \frac{m}{3}(c-a)^2 + \frac{m}{3}(a+b)^2,$$

czyli $$J_O = \frac{1}{3}m(a^2+b^2+c^2) - \frac{2}{3}ma^2 + \frac{2}{3}ma(b-c),$$