Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 1987

Zadania z fizyki nr 39, 40

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

39. Na środku poziomej, podpartej na brzegach, sprężystej płyty umieszczono silnik. Stwierdzono przy tym, że płyta ugięła się w tym miejscu o 1 cm. Zakładając, że masa silnika jest dużo większa od masy płyty, obliczyć przybliżoną częstotliwość drgań rezonansowych silnika na tej płycie.

40. Jak zmienia się okres obiegu Ziemi wokół Słońca (rok gwiazdowy) na skutek wypromieniowania energii przez Słońce? Gęstość strumienia tej energii w odległości od Słońca, równej średniemu promieniowi orbity Ziemi, wynosi $1{,}4\cdot 10^3\ \mathrm{W/m^2}$, pozostałe dane do obliczeń należy wziąć z tablic.

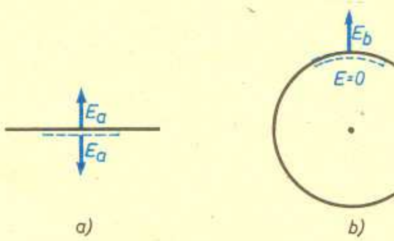
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1986

Przypominamy treść zadań:

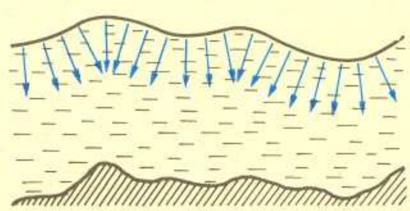
31. Obliczyć stosunek E_a/E_b wartości natężenia pola elektrycznego, występującego w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni jednorodnie naładowanej ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ, w dwóch przypadkach:
a) nieskończona powierzchnia płaska (E_a),
b) powierzchnia kuli (E_b).

32. W badaniach dna oceanicznego wykorzystuje się między innymi prowadzone za pomocą sztucznych satelitów Ziemi pomiary kształtu powierzchni oceanu, która — jak się okazuje — ma lokalne wzniesienia oraz depresje. Jakie informacje dotyczące dna oceanu można uzyskać na podstawie wyników takich pomiarów? Przytoczyć tok rozumowania.

31. W obu przypadkach wycinek powierzchni naładowanej o takim samym polu S ,,obudujmy" powierzchnią zamkniętą w kształcie cienkiej kanapki, jak na rysunku 1. Obie ,,kanapki" zawierają w swym wnętrzu taki sam ładunek $S\sigma$. Zgodnie więc z prawem Gaussa strumień pola elektrycznego Φ przez ich powierzchnię jest dla przypadków *a)* i *b)* jednakowy (równy $\sigma S/\varepsilon_0$). W przypadku powierzchni płaskiej natężenie pola elektrycznego E_a ma jednakową wartość po obu stronach naładowanej powierzchni, zatem strumień Φ wynosi $2E_aS$. W przypadku kuli niezerowa wartość E_b występuje tylko po jej zewnętrznej stronie (wewnątrz kuli pole znika) i strumień Φ jest równy E_bS. Z porównania obu przypadków wynika $E_a/E_b = 1/2$.

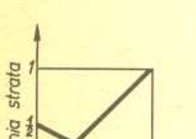


Rys. 1


Rys. 2

32. Powierzchnia oceanu odzwierciedla rozkład lokalnego pola grawitacyjnego, gdyż przyjmuje kształt powierzchni ekwipotencjalnej; w miejscach zwiększonej grawitacji powierzchnia wznosi się wyżej, w miejscach zmniejszonej grawitacji występuje obniżenie powierzchni oceanu. Schematycznie obrazuje to rysunek 2 (wektory przedstawiają natężenie pola grawitacyjnego). Anomalie grawitacyjne z kolei są związane z rozkładem mas w dnie oceanicznym. W pobliżu podwodnych gór występuje wzmożone pole grawitacyjne, dolinom podmorskim towarzyszy zaś ujemna anomalia grawitacyjna. Kształt powierzchni oceanu umożliwia więc określenie topografii dna morskiego (metoda ta, nazywana obrazowaniem geotektonicznym, uzależniona jest w istocie od rozkładu gęstości w skorupie ziemskiej pod oceanem).

Rozwiązanie zadania M 456. Rozpatrzmy następującą strategię: gdy wypadnie reszka, monetę uznajemy za normalną; gdy wypadnie orzeł, z prawdopodobieństwem p uznajemy monetę za normalną, a z prawdopodobieństwem $1-p$ za nienormalną. Średnia strata dla monety normalnej wynosi teraz $\frac{1}{2}(1-p)$, a dla monety nienormalnej p. Znajdziemy p, przy którym $\max\left\{\frac{1}{2}(1-p), p\right\}$ jest najmniejsze. Musi być $p = \frac{1}{2}(1-p)$ patrz rysunek. Zatem $p = \frac{1}{3}$; maksymalna średnia strata wynosi wtedy $\frac{1}{3}$.



Zadania z matematyki nr 141, 142

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

141. Obliczyć sumę szeregu

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}+\ldots$$

142. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne będące polami wielokątów ograniczonych łamanymi zamkniętymi bez samoprzecięć, których wszystkie boki mają długość jednostkową, a każde dwa kolejne boki są prostopadłe.

Zadanie **142** przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1986

Przypominamy treść zadań:

133. Dać przykład takiego wielościanu wypukłego, że wszystkie jego krawędzie mają równą długość i są styczne do pewnej sfery, ale nie istnieje sfera opisana na nim.

134. Rozwiązać równanie $x = 5+(5+\ldots+(5+x^{-1})^{-1}\ldots)^{-1}$; po prawnej stronie jest $n-1$ par nawiasów oraz n znaków odwrotności.

133. Weźmy sześcian oraz ośmiościan foremny o średnicy dwukrotnie dłuższej od krawędzi sześcianu, usytuowane tak, że każda krawędź sześcianu przecina dokładnie jedną krawędź ośmiościanu, przy czym krawędzie te są prostopadłe i połowią się. Można to sobie wyobrazić biorąc prostokątny układ współrzędnych i przyjmując za wierzchołki sześcianu punkty o współrzędnych równych ± 1, a za wierzchołki ośmiościanu — punkty o jednej współrzędnej równej ± 2, a pozostałych równych 0. Każda wspomniana wyżej para odcinków prostopadłych, z których jedna jest krawędzią sześcianu, a druga krawędzią ośmiościanu, stanowi parę przekątnych pewnego rombu (w podanym modelu analitycznym przykładem może być romb o wierzchołkach $(2,0,0),(1,1,-1),(0,2,0),(1,1,1)$). Niech Z będzie zbiorem złożonym ze wszystkich wierzchołków obu rozpatrywanych brył (sześcianu i ośmiościanu) i niech $B = \operatorname{conv} Z$ będzie najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym Z. Bryła B jest wielościanem o wierzchołkach w punktach zbioru Z, a jej ścianami są określone przed chwilą romby. Bryła B ma więc 14 wierzchołków, 12 ścian i 24 krawędzie; jest to tzw. *dwunastościan rombowy*. Nietrudno sprawdzić, że spełnia on wszystkie warunki postawione w zadaniu.

134. Dane równanie przepisujemy w postaci $x = f^n(x)$, gdzie $f(x) = 5+x^{-1}$, a f^n oznacza n-tą iteratę funkcji f (czyli n-krotne złożenie $f\circ f\circ\ldots\circ f$). Funkcja f ma dwa punkty stałe, czyli liczby spełniające równanie $x = f(x)$. Są to $x_1 = (5-\sqrt{29})/2$ i $x_2 = (5+\sqrt{29})/2$. Te same liczby są, oczywiście, także punktami stałymi funkcji f^n, a więc rozwiązaniami danego w zadaniu równania. Przez indukcję sprawdzamy, że każda iterata f^n jest funkcją postaci $(ax+b)/(cx+d)$, przy czym $c > 0$, $d \geqslant 0$. Równanie $x = f^n(x)$ prowadzi zatem do równania kwadratowego $x(cx+d) = ax+b$ z dodatnim współczynnikiem przy x^2; ma więc co najwyżej dwa pierwiastki. Wobec tego liczby x_1 i x_2 są jedynymi pierwiastkami rozważanego równania dla każdej naturalnej wartości n.

Rozwiązanie zadania M 455. Przypuśćmy, że za każdym razem figura zostaje przekłuta nie więcej niż 10 razy. Wówczas rzuty poszczególnych części figury pokrywają kwadrat o polu 1 nie więcej niż 10 razy, wobec tego pole figury nie może przekraczać 10; sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 454. Wystarczy wykazać, że jeśli $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu w o współczynnikach wymiernych, to $-\sqrt{2}$ także.

Niech $w(x) = (a_{2k}x^{2k}+\ldots+a_2x^2+a_0)+(a_{2l+1}x^{2l+1}+\ldots+a_1x) = f(x)+x\cdot g(x)$, gdzie w wielomianach f i g występują wyłącznie parzyste potęgi x.

Wtedy $w(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2})+\sqrt{2}\,g(\sqrt{2}) = p+q\sqrt{2}$, gdzie p i q są wymierne. Ale $p+q\sqrt{2} = 0$; gdyby q było różne od zera, mielibyśmy $\sqrt{2} = -\frac{p}{q}$, co jest niemożliwe.

Stąd $q = 0$ i $p = 0$.

Mamy teraz $w(-\sqrt{2}) = p-q\sqrt{2} = 0$, co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania F 210. Z zasady zachowania energii obliczamy prędkość wagonika w punkcie A (oznaczenia jak na rysunku)

$$v = \sqrt{2g(H-h)}.$$

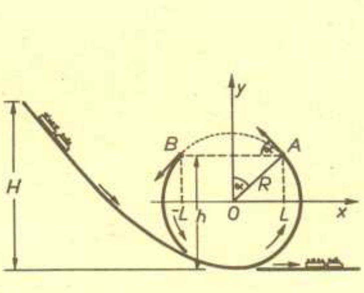
Dalej poruszać się będzie on jak ciało o masie m wyrzucone z prędkością v pod kątem α do poziomu, gdzie:

$$\sin\alpha = \frac{L}{R},\quad \cos\alpha = \frac{h-R}{R}.$$

Zasięg takiego rzutu ukośnego musi być równy długości wyrwy

$$2L = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2L(h-R)}{R^2}.$$



Stąd obliczamy wysokość H

$$H = h+\frac{R^2}{2(h-R)}.$$

Aby wagonik mógł bezpiecznie kontynuować jazdę wzdłuż dalszej części toru, wektor prędkości wagonika musi być styczny do kołowej części toru w punkcie B. Tor ruchu wagonika w powietrzu jest parabolą o równaniu

$$y = (x+L)\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v^2\cos^2\alpha}(x+L)^2$$

w układzie współrzędnych jak na rysunku 1. Styczna do tej paraboli w punkcie B ma współczynnik kierunkowy równy

$$y'(-L) = L/(h-R).$$

Z drugiej strony współczynnik kierunkowy stycznej do okręgu w tym samym punkcie wynosi

$$a = L/(R^2-L^2)^{1/2} = L/(h-R).$$

Wobec równości tych współczynników prędkość wagonika jest styczna do okręgu i umożliwia bezpieczne kontynuowanie jazdy.