Kącik olimpijski

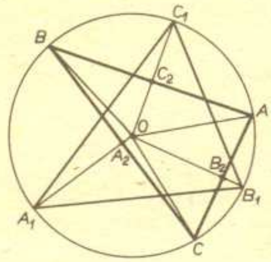
Dziś — zamiast twierdzenia — konstatacja pewnej prawidłowości. Twierdzenie może zresztą też, ale całkiem banalne:

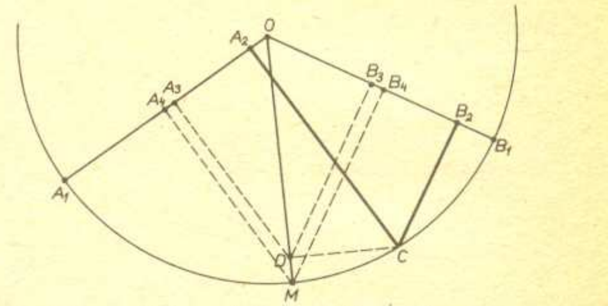
$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant (b+c)/2 \\ y \leqslant (c+a)/2 \\ z \leqslant (a+b)/2 \end{array}\right| \Rightarrow x+y+z \leqslant a+b+c \quad \text{(i tak samo dla} \geqslant\text{)}.$$

Wiele zadań (np. z geometrii trójkąta) sprowadza się do dowodów nierówności, w których i lewa, i prawa strona jest sumą trzech składników, a każdy powstaje z poprzedniego (I $\to$ II $\to$ III $\to$ I) przez cykliczną zmianę zmiennych (np. danych trzech boków, kątów, pól lub innych wielkości).

Wzmiankowana prawidłowość polega na tym, że często tezę można uzyskać przez zsumowanie trzech nierówności, łączących składniki lewej strony ze średnimi arytmetycznymi odpowiednich par składników prawej strony (lub odwrotnie). Przy tym, oczywiście, wystarczy udowodnić tylko jedną z tych trzech składowych nierówności, bo pozostałe dwie powstają z niej „cyklicznie".

Oto przykład: Zadanie 4 z zawodów I stopnia XXXVII O.M. (w skrócie: 4 — I — XXXVII). Trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg, A_1, B_1, C_1 są środkami łuków BC, CA, AB (zawartych w półokręgach). Dowieść, że $S_{A_1B_1C_1} \geqslant S_{ABC}$.





Rozwiązanie. Sposób I. Mamy dowieść, że $S_{OA_1B_1}+S_{OB_1C_1}+S_{OC_1A_1} \geqslant S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA}$.

Zgodnie z poprzednią uwagą wystarczy, jeśli pokażemy, że $S_{OA_1B_1} \geqslant (S_{OBC}+S_{OCA})/2$. Oznaczmy przez M środek łuku A_1B_1, przez D, A_2, B_2 — rzuty punktu C na $\overline{OM}$, $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, przez A_3, B_3 — rzuty D na $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$, a przez A_4, B_4 — rzuty M na $\overline{OA_1}$, $\overline{OB_1}$. Nietrudno stwierdzić, że

$$S_{OA_1B_1} = S_{OA_4MB_4} \geqslant S_{OA_3DB_3} \geqslant S_{OA_2CB_2} = S_{OA_2C}+S_{OCB_2} = \frac{1}{2}S_{OBC}+\frac{1}{2}S_{OCA}.$$

Sposób II. Miary kątów trójkątów $A_1B_1C_1$ i ABC związane są wzorami $\sphericalangle A_1 = (\sphericalangle B + \sphericalangle C)/2$ itd. (cyklicznie). Stąd

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}R^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C), \qquad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}R^2\big(\sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B)\big)$$

(R — promień okręgu opisanego). Należy więc udowodnić, że

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \leqslant \sin(B+C)+\sin(C+A)+\sin(A+B).$$

W myśl omawianej prawidłowości wystarczy pokazać, że $(\sin 2A+\sin 2B)/2 \leqslant \sin(A+B)$. Ale to oczywiste, bo lewa strona równa się $\sin(A+B)\cos(A-B)$.

Zadania

1. Dowieść, że jeżeli A, B, C są kątami trójkąta, to

$$\sin A+\sin B+\sin C < \sin\left(A+\frac{B}{2}\right)+\sin\left(B+\frac{C}{2}\right)+\sin\left(C+\frac{A}{2}\right).$$

(2 — I — XXXIV)

2. Dwusieczne kątów A, B, C trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na tym trójkącie odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że $AK+BL+CM > AB+BC+CA$.

(5 — II — XXXIV)

3. W trójkącie ABC wybrano punkty A', B', C' odpowiednio na bokach $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ tak, że proste AA', BB', CC' przecinają się w jednym punkcie. Udowodnić, że $S_{A'B'C'} \leqslant S_{ABC}/4$.

(6 — II — XXXVII)

4. Liczby a, b, c są długościami boków trójkąta. Dowieść, że

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

(2 — VI MOM)

M.E.K.

Rozwiązanie zadania F 211. Na mocy zasady zachowania momentu pędu (obliczanego względem osi obrotu — rysunek) i zasady zachowania energii

$$mvR = mv_kR+I\omega$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_k^2}{2}+\frac{I\omega^2}{2},$$

gdzie v_k jest prędkością końcową piłki po zderzeniu z drzwiami, które spowodowało ich obrót z prędkością kątową ω.
Stąd obliczamy:

$$v_k = v\left(\frac{mR^2-I}{I+mR^2}\right); \qquad v_k \text{ jest} > 0, \text{ jeśli } mR^2 > I,$$

$$\omega = \frac{2mvR}{I+mR^2}.$$

Aby drugie skrzydło zdążyło uderzyć piłkę, prędkość kątowa musi być taka, by czas obrotu tego skrzydła do punktu, w którym piłka opuszcza drzwi $t_1 = \frac{\alpha}{\omega}$, był mniejszy niż czas t_2, w jakim piłka przemieści się na odległość x od punktu zderzenia.

Czas t_2 jest równy $t_2 = \frac{x}{v_k}$, gdzie $x = \sqrt{R^2-(R-2r)^2}$, a kąt α, o który obróci się drugie skrzydło, $\alpha = \frac{\pi}{2}+\frac{l}{R}$.
W przybliżeniu przyjmujemy, że długość łuku $l = \sqrt{r^2+x^2}$.
Na tej podstawie otrzymujemy warunek
$\frac{\alpha}{\omega} \leqslant \frac{x}{v_k}$, czyli

$$v_k\left(\alpha\frac{mR^2-I}{I+mR^2}-\frac{2mRx}{I+mR^2}\right) \leqslant 0,$$

który jest spełniony jedynie dla $v_k = 0$. Ma to miejsce jedynie w przypadku, gdy $mR^2 = I$.
A więc drzwi mogą uderzyć piłkę przy dowolnej prędkości początkowej, jeśli tylko prędkość końcowa jest równa zeru.
W przeciwnym przypadku nie uderzą.