dr Marcin E. KUCZMA

Nie mamy się czym chwalić. Najlepszy z Polaków — w siódmej dziesiątce; polska ekipa — w nieoficjalnej klasyfikacji drużynowej — na 17 miejscu, z łączną zdobyczą punktową w wysokości < 37% możliwych do zdobycia punktów — oto nasze trofea w

XXVII MIĘDZYNARODOWEJ OLIMPIADZIE MATEMATYCZNEJ

(Warszawa, 8—14 VII 1986)

Dodajmy, że w ostatnicl. latach rzadko sięgaliśmy po wyższe laury. Okazuje się, że atut własnego terenu nie zdołał odegrać większej roli. Może tym właśnie różni się MOM od ,,prawdziwego sportu"?

To teraz o XXVII MOM już nie z punktu widzenia ambicji narodowych. Już po raz trzeci Polska była gospodarzem (poprzednio: V MOM '63 i XIV MOM '72). Impreza miała rozmach należyty: 210 uczestników z 37 państw (odpowiednie liczby dla V MOM: 64 i 8; dla XIV MOM: 107 i 14); pełne sześcioosobowe ekipy przysłały 32 państwa. Z przemówienia profesora Aleksandra Pełczyńskiego, Przewodniczącego Komitetu Organizacyjnego XXVII MOM, podczas uroczystości otwarcia w dniu 8 lipca: ,,... dynamika rozwoju międzynarodowych olimpiad matematycznych ma więc charakter wykładniczy".

Mimo niedociągnięć organizacyjnych była to wspaniała impreza. Ogromna, barwna, wielonarodowościowa grupa młodzieży i opiekunów, przewodniczących delegacji. Wspólnie spędzony tydzień, nawiązane znajomości i przyjaźnie. Intensywna praca myślowa, intensywne życie towarzyskie. Spełnione nadzieje i zawiedzione ambicje. To wszystko na długo pozostanie w pamięci.

Przez dwa dni, 9 i 10 lipca, trwały zawody. Uczniowie (oraz uczennice, w liczbie 9) zmagali się z zadaniami konkursowymi. Przez trzy dni poprzedzające zawody trwała mozolna praca Jury nad wyborem zadań oraz ich jednolitym zredagowaniem. Z około 80 zadań, zaproponowanych przez uczestniczące państwa, czteroosobowy zespół matematyków kraju organizatora (czyli Polski) jeszcze w maju i czerwcu wstępnie wyselekcjonował 21 zadań, dążąc do uzyskania możliwie szerokiego wachlarza tematyki i zróżnicowania trudności, a w końcu kierując się kryteriami estetycznymi. Wybór 6 zadań z tego zestawu należał do 38-osobowego Jury XXVII MOM (37 reprezentantów państw uczestniczących oraz Przewodniczący Jury profesor Stanisław Balcerzyk). 8 zadań zostało odrzuconych z przyczyn formalnych, jako zbyt podobne do zadań wykorzystanych w olimpiadach i konkursach w różnych krajach. Nad zadaniami pozostałymi rozgorzała dyskusja, do głosu dochodziły emocje. Czy można dopuścić, żeby dwa zadania pochodziły z propozycji jednego kraju? Czy można zrezygnować ze stereometrii? Czy można dać dwa zadania kombinatoryczne? Albo teorio-liczbowe? Czy mogą być dwa bardzo trudne? A jeśli tak, to właściwie które są bardzo trudne? A które, naszym zdaniem, wyróżniają się urodą? Czy ktokolwiek z Szanownych Kolegów jest w stanie podać inne rozwiązanie zadania z pięciokątem?

Potem było dopracowywanie sformułowań zadań. Odbywało się to w czterech zespołach językowych (A, F, N, R). Teksty podane w propozycjach były traktowane ,,roboczo", jako punkt wyjścia do ostatecznej redakcji. Okazało się, że teksty powstałe w czterech zespołach są do siebie zupełnie niepodobne. I znów zażarta dyskusja. Który lepszy?

Dobrą ilustrację może stanowić zadanie nr 4. W oryginalnym sformułowaniu trójkąt ,,ślizga się" (glides) jednym bokiem po obwodzie wielokąta. ,,Ja nie wiem, jak to jest w szkołach kraju Szanownego Kolegi. W naszych szkołach uczniowie wiedzą z lekcji matematyki, co to jest zbiór punktów o danej własności, natomiast ze ślizganiem mają do czynienia co najwyżej na lekcjach wychowania fizycznego". Pada propozycja, by polecenie zadania brzmiało: wyznaczyć zbiór punktów X wewnątrz wielokąta, dla których istnieją punkty Y i Z na obwodzie wielokąta takie, że trójkąt XYZ przystaje do OAB. Kontrargument: ,,To jest wprawdzie precyzyjne, ale zatraca się intuicyjny sens, przejrzysty przy sformułowaniu dynamicznym". ,,Nikt z uczniów nie będzie miał wątpliwości, jak rozumieć ten ruch trzeciego wierzchołka". ,,To znaczy, żądamy od uczniów, by ich dobra wola wyrównała naszą nieudolność w precyzyjnym podaniu treści?" Emocje coraz gorętsze, problem dojrzewa do głosowania. Nieznaczna większość jest za sformułowaniem dynamicznym. ,,Mam to rozumieć, że większość jest przeciwna temu, by uczniowie mojego kraju otrzymali sformułowanie rygorystycznie poprawne?!"

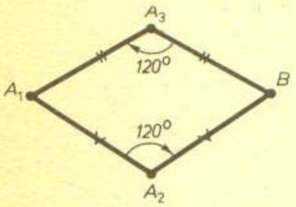
Zdarza się czasem, że logiczna usterka w treści może być trudna do zauważenia. Tak było z zadaniem nr 1. Oryginalna propozycja brzmiała: Zbiór $S = \{2, 5, 13\}$ ma tę własność, że dla dowolnych różnych liczb $a, b \in S$ liczba $ab-1$ jest pełnym kwadratem; pokazać, że dla żadnej liczby naturalnej $d \notin S$ zbiór $S \cup \{d\}$ nie ma tej własności. To sformułowanie wszystkim przypadło do gustu, niezgodności dotyczyły drobiazgów, ,,kosmetyki redakcyjnej". I gdy już tekst taki został (w czterech językach) właściwie zaakceptowany, jeden z jurorów zauważył błąd! Twierdzenie podane w tym tekście jest nieprawdziwe. Kto z naszych Czytelników zauważy pułapkę? Zagadka dla sprytnych; rozwiązanie w numerze.

Zadanie 1 (propozycja RFN). Niech d będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą różną od 2, 5 i 13. Udowodnić, że w zbiorze $\{2, 5, 13, d\}$ można tak wybrać dwa różne elementy a, b, by $ab-1$ nie było kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Wystarczy dowieść, że co najmniej jedna z liczb $2d-1$, $5d-1$, $13d-1$ nie jest pełnym kwadratem. Przy dzieleniu przez 16 każda liczba będąca kwadratem daje resztę 0, 1, 4 lub 9, natomiast co najmniej jedna z trzech napisanych wyżej liczb daje inną resztę — o czym przekonujemy się obliczając te reszty dla szesnastu możliwych wartości reszt z dzielenia d przez 16.

Zadanie 2 (Chiny). Na płaszczyźnie dany jest trójkąt $A_1A_2A_3$ i punkt P_0. Definiujemy $A_s = A_{s-3}$ dla wszystkich $s \geq 4$. Konstruujemy ciąg punktów $P_0, P_1, P_2, \ldots$ tak, że P_{k+1} jest obrazem P_k przy obrocie wokół punktu A_{k+1} $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ o 120° w kierunku wskazówek zegara. Udowodnić, że jeśli $P_{1986} = P_0$, to trójkąt $A_1A_2A_3$ jest równoboczny.

Rozwiązanie. Złożenie obrotów (o dowolnych środkach) o kąty, których suma jest wielokrotnością 360°, jest przesunięciem. Jeśli więc r_i oznacza obrót (w ustalonym kierunku) o 120° wokół A_i $(i = 1, 2, 3)$, to $f = r_3r_2r_1$ jest przesunięciem o pewien wektor v. Zatem rozważane przekształcenie przeprowadzające P_0 na P_{1986} jest przesunięciem o wektor $(1986/3)v = 662v$, a ponieważ $P_{1986} = P_0$, więc $v = 0$ i f jest przekształceniem identycznościowym.



Stąd $A_1 = f(A_1) = r_3(B)$, gdzie $B = r_2r_1(A_1) = r_2(A_1)$ (rysunek). Trójkąty A_1A_2B i BA_3A_1 są równoramienne, mają równe kąty ($\sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_3 = 120°$) i wspólny bok A_1B — są więc przystające. Wobec tego $A_1A_2BA_3$ jest rombem i $A_1A_2A_3$ jest trójkątem równobocznym.

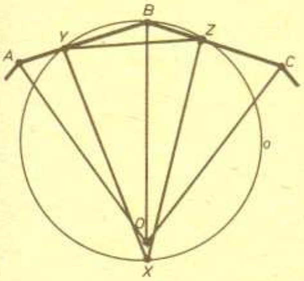
Zadanie 3 (NRD). Każdemu wierzchołkowi pięciokąta foremnego przyporządkowana jest liczba całkowita w taki sposób, że suma wszystkich pięciu liczb jest dodatnia. Jeśli trzem kolejnym wierzchołkom przyporządkowane są odpowiednio liczby x, y, z i $y < 0$, to następująca operacja jest dopuszczalna: liczby x, y, z zastępujemy odpowiednio liczbami $x+y$, $-y$, $z+y$. Powtarzamy tę operację dopóty, dopóki co najmniej jedna z pięciu liczb jest ujemna. Rozstrzygnąć, czy ten proces koniecznie musi się zakończyć po skończonej liczbie kroków.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że w pewnej chwili kolejnym wierzchołkom pięciokąta przyporządkowane są liczby $u_1, \ldots, u_5$ i że któraś z nich jest ujemna (np. $u_j < 0$). Niech $V = (v_1, \ldots, v_5)$ będzie układem liczb otrzymanym z układu $U = (u_1, \ldots, u_5)$ po wykonaniu opisanej w zadaniu operacji (dla $y = u_j$). Rozważmy funkcję $F(U) = \sum(u_{i+1}-u_{i-1})^2$ (numeracja cykliczna: $u_0 = u_5$, $u_6 = u_1$). Bezpośrednim rachunkiem sprawdzamy, że $F(V)-F(U) = 2u_jS$, gdzie $S = \sum u_i = \sum v_i > 0$; stąd $F(V) < F(U)$. Zatem wartości F w kolejnych krokach procedury tworzą malejący ciąg liczb całkowitych nieujemnych. Ciąg taki musi być skończony.

Inna metoda (J. Keane, USA; nagroda specjalna). Przy oznaczeniach jak wyżej, niech $G(U) = \sum|u_i| + \sum|u_i+u_{i+1}| + \sum|u_i+u_{i+1}+u_{i+2}| + \sum|u_i+u_{i+1}+u_{i+2}+u_{i+3}|$.
Gdy porównamy 20 składników definiujących $G(U)$ z 20 składnikami definiującymi $G(V)$, okaże się, że 19 składników ma tę samą wartość, a ten jeden, który pozostaje, jest większy w $G(U)$ niż w $G(V)$. Konkluzja jak w metodzie poprzedniej.

Zadanie 4 (Islandia). Niech A i B będą kolejnymi wierzchołkami n-kąta foremnego ($n \geqslant 5$) o środku O położonego na płaszczyźnie. Trójkąt XYZ, który jest przystający do OAB i który zajmuje początkowo pozycję OAB, porusza się na płaszczyźnie tak, że każdy z punktów Y, Z przebiega cały brzeg wielokąta, a X pozostaje wewnątrz wielokąta. Znaleźć miejsce geometryczne punktów X.

Rozwiązanie. Niech C będzie kolejnym za A, B wierzchołkiem wielokąta i przypuśćmy, że Y leży wewnątrz $\overline{AB}$, a Z — wewnątrz $\overline{BC}$.



Okrąg o opisany na XYZ przechodzi przez B, ponieważ $\sphericalangle YXZ + \sphericalangle YBZ = \sphericalangle AOB + \sphericalangle ABO + \sphericalangle OBC = 180°$. Promień tego okręgu równa się $r = R/2\cos\alpha$, gdzie $\alpha = 180°/n$, a $R = OA$ jest promieniem okręgu opisanego na wielokącie. Kąty XYZ i XBZ są ówne jako wpisane oparte na tym samym łuku. Stąd $\sphericalangle OBZ = \sphericalangle OBC = \sphericalangle XYZ = \sphericalangle XBZ$, czyli punkty B, O, X leżą na jednej prostej. Cięciwa BX okręgu o największą długość ma wtedy, gdy jest średnicą. Zatem maksymalna długość odcinka OX wynosi $d = 2r - R = R((1/\cos\alpha) - 1)$. Szukaną figurą jest n-ramienna gwiazdka — suma n odcinków długości d leżących na przedłużeniach odcinków łączących punkt O z wierzchołkami wielokąta.

Zadanie 5 (Wielka Brytania). Znaleźć wszystkie takie funkcje f określone na zbiorze nieujemnych liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych nieujemnych, że

(i) $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ dla wszystkich $x, y \geqslant 0$,

(ii) $f(2) = 0$,

(iii) $f(x) \neq 0$ dla $0 \leqslant x < 2$.

Rozwiązanie. Dla $z \geqslant 2$ mamy $f(z) = f((z-2)f(2))f(2) = 0$. Zatem

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z \geqslant 2.$$

Dla $0 \leqslant y < 2$ zachodzą więc równoważności: $x \geqslant 2-y \Leftrightarrow x+y \geqslant 2 \Leftrightarrow f(x+y) = 0 \Leftrightarrow f(xf(y))f(y) = 0 \Leftrightarrow f(xf(y)) = 0 \Leftrightarrow xf(y) \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant 2/f(y)$. Znaczy to, że $2-y = 2/f(y)$ dla $0 \leqslant y < 2$. Zatem f musi być dana wzorem

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y} & 0 \leqslant y < 2, \\ 0 & y \geqslant 2. \end{cases}$$

Pozostaje tylko sprawdzić, że funkcja ta istotnie spełnia warunki zadania.

Zadanie 6 (NRD). Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów o współrzędnych całkowitych. Czy można pokolorować pewne punkty tego zbioru na czerwono, a pozostałe na biało, w taki sposób, że dla każdej prostej L równoległej do jednej z osi współrzędnych bezwzględna wartość różnicy pomiędzy liczbą punktów białych i czerwonych leżących na L jest nie większa niż 1? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Rozwiązanie. Pokolorowanie takie jest zawsze możliwe. Dla dowodu weźmy dowolną linię prostą L poziomą lub pionową przecinającą rozważany zbiór A i niech $P_1, \ldots, P_r$ będą punktami zbioru $A \cap L$, ponumerowanymi w kolejności wzrastania wolnej współrzędnej. Łączymy odcinkami P_1 z P_2, P_3 z P_4 itd. (na końcu może pozostać pojedynczy punkt). Tak samo postępujemy z punktami na każdej takiej prostej L. Otrzymujemy rodzinę odcinków; każdy punkt z A należy co najwyżej do dwóch odcinków. Suma wszystkich odcinków rozpada się na linie łamane bez wspólnych wierzchołków, zamknięte lub nie. Wierzchołki każdej z nich malujemy naprzemiennie (biało, czerwono, biało itd.); jest to możliwe, bo łamane zamknięte mają parzystą liczbę wierzchołków. Jeśli pozostały punkty nie należące do żadnego z rozważanych odcinków, malujemy je całkiem dowolnie. Nietrudno sprawdzić, że otrzymane pokolorowanie ma wymaganą własność.

Czas rozwiązywania $4\frac{1}{2}$ godziny każdego dnia. Za rozwiązanie każdego zadania można było otrzymać 7 punktów.

W końcu przecież udało się (a było to już dobrze po północy 6/7 lipca) ustalić kompromisowe sformułowania wszystkich zadań, praktycznie jednobrzmiące w czterech językach. Te teksty, przetłumaczone następnie przez poszczególnych jurorów na języki ojczyste, zostały powielone i w dniach zawodów rozdane uczniom.
Od chwili przybycia do Warszawy aż do zakończenia pisania w czwartek jurorzy nie mieli możności kontaktu ze swymi podopiecznymi; byli zakwaterowani na przeciwległym krańcu miasta i tam też obradowali. Jedyny krótkotrwały kontakt wzrokowy miał miejsce podczas uroczystości oficjalnego otwarcia MOM. Do sali, w której się to odbywało, Jury zostało wprowadzone innymi drzwiami niż uczniowie i zajęło wyznaczone miejsca w odrębnej części sali. ,,Drut kolczasty", choć niematerialny, był wyraźnie wyczuwalny.
Zawody: dwa dni po trzy zadania. Dla zawodników — koniec wysiłku i zdenerwowania. Organizatorzy oferują im program turystyczny. A dla Jury? Rozwiązania zadań są napisane w ojczystych językach uczniów. Rozpoczyna się następny etap prac: koordynacja ocen. 32-osobowa ekipa koordynatorów (matematyków z różnych ośrodków w Polsce) została podzielona na sześć zespołów, do poszczególnych zadań konkursowych. Kto czytał w numerze 5/1986 *Delty* tekst pt. *Byłem koordynatorem*, ten wie, jak wyglądała koordynacja ocen w kameralnych warunkach XIV MOM. Przy obecnej liczbie uczestników tryb tej pracy musiał zostać usprawniony. Do k-tego zespołu koordynatorów podchodzi (według ustalonego ,,rozkładu jazdy") reprezentant m-tego kraju w Jury ($k \leqslant 6$, $m \leqslant 37$) i przedstawia ocenione wstępnie przez siebie rozwiązania k-tego zadania wykonane przez swoich podopiecznych. Niektóre prace trzeba tłumaczyć słowo po słowie, inne wystarczy pokrótce zreferować. Ocenę ustala juror wraz z koordynatorami; zadaniem tych ostatnich jest baczyć, by jednakową miarką były mierzone prace wszystkich uczestników. Kontrowersje były nieliczne. Żadna z nich, na szczęście, nie trafiła na plenarne posiedzenie Jury; we wszystkich przypadkach udało się wynegocjować ocenę możliwą do przyjęcia dla obu stron. Niemała w tym zasługa Przewodniczącego Zespołu Koordynatorów profesora Tadeusza Figla, który pośrednicząc w negocjacjach kilkakrotnie wzniósł się na wyżyny kunsztu dyplomacji.
Tak więc końcowe posiedzenie Jury sprowadziło się do ustalenia barier punktowych dla poszczególnych rodzajów nagród oraz przyznania nagrody specjalnej (za pomysłowe rozwiązanie zadania nr 3). Decyzje Jury uwidocznione są w tabeli wyników u dołu strony. Warto nadmienić, że wśród laureatów nagród III stopnia znalazł się 10-letni Australijczyk Terence Tao (19 pkt) (a także trójka Polaków).
MOM jest oficjalnie rozgrywana tylko w konkurencji indywidualnej, ale kierownicy ekip pracowicie sumują punkty i tworzą nieoficjalną klasyfikację drużynową. W tym roku na czele znalazły się ex aequo Stany Zjednoczone i Związek Radziecki (po 203 punkty), a dalej RFN (196), Chiny (177), NRD (172), Rumunia (171). Ekipa polska (z 93 punktami) była siedemnasta, za Australią (117) i Kanadą (112), a przed Marokiem (90) i Tunezją (85). Najbardziej wyrównaną ekipę przysłała RFN; jej najsilniejszy zawodnik zdobył 36 punktów, a dwaj najsłabsi — po 30. Drużyna polska była jedyną, która nie zdobyła ani jednego punktu w zadaniu nr 4. Z drużyn o pełnych składach taki sam wynik miały dwie drużyny w zadaniu nr 6 i cztery w zadaniu nr 3. Natomiast komplet punktów zdobyło siedem drużyn w zadaniu nr 2 i po jednej w zadaniach 4 (!) i 5. Suma wszystkich ocen za rozwiązania zadań nr 1, 2, 3, 4, 5, 6 wyniosła odpowiednio: 800, 864, 176, 683, 881, 405. Widać, że najtrudniejsze było zadanie nr 3 (zresztą zgodnie z przewidywaniami). Ekipa radziecka zdobyła za to zadanie razem 22 punkty; ekipa amerykańska — 17 punktów; rumuńska — 16; chińska — 14 (inne mniej; np. polska — 1).
Na marginesach podane są teksty zadań wraz ze szkicowymi rozwiązaniami. Dysponując rozwiązaniami pochodzącymi od autorów zadań, od uczestników olimpiady i od matematyków, którzy rozwiązywali te zadania dla własnej satysfakcji, wybraliśmy rozwiązania najprostsze do skrótowego zapisania. Zaznaczmy jednak, że wszystkie zadania, oprócz 3, były przez olimpijczyków rozwiązywane na wiele innych sposobów. Na przykład zadanie nr 2 rozwiązuje się wygodnie przy użyciu liczb zespolonych. W zadaniu nr 6 poznaliśmy chyba z sześć istotnie różnych metod rozwiązania. Zachęcamy naszych Czytelników do popróbowania własnych sił na tym polu. Namawiamy do tego przede wszystkim tych, którzy są jeszcze uczniami. Przecież za rok — XXVIII MOM. Na Kubie!

WYNIKI XXVII MOM

Nagrody I stopnia:

Kós Géza	(Węgry)	42pkt
Władimir Roganow	(ZSRR)	
Stanisław Smirnow	(ZSRR)	
Fang Weimin	(Chiny)	41pkt
Jörg Jahnel	(NRD)	
Joseph Keane	(USA)	

oraz 12 zawodników z $\geqslant$ 34pkt
(1 z Brazylii, 1 z Bułgarii, 2 z Chin, 1 z Francji, 2 z RFN, 2 z Rumunii, 2 z USA i 1 z Wietnamu)

Nagrody II stopnia:
41 zawodników z 20 krajów ($\geqslant$ 26 pkt)

Nagrody III stopnia:
48 zawodników z 25 krajów ($\geqslant$ 17pkt)
w tym trzech Polaków
Piotr Jędrzejewicz 23pkt
Tadeusz Pezda 20pkt
Stanisław Kasjan 17pkt

Nagroda specjalna:
Joseph Keane (USA)
(za oryginalne rozwiązanie zadania nr3)