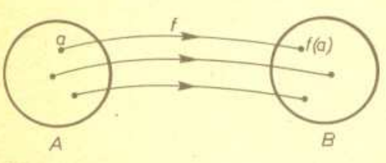
O równoliczności zbiorów

Mgr Piotr ZAKRZEWSKI

Czy zbiory nieskończone mogą różnić się liczbą elementów? Żeby móc sensownie postawić takie pytanie, spróbujmy uogólnić pojęcie równej liczebności zbiorów. Dla stwierdzenia, że skończone zbiory A i B mają po tyle samo elementów, wystarczy elementy zbioru A połączyć z elementami zbioru B w rozłączne pary w taki sposób, żeby żaden z elementów któregokolwiek ze zbiorów nie pozostał bez pary. Każdemu elementowi zbioru A odpowiada wówczas dokładnie jeden, występujący z nim w parze, element zbioru B i odpowiedniość ta jest wzajemnie jednoznaczna. Na odwrót: każda funkcja f działająca różnowartościowo z A na B łączy elementy tych zbiorów w pary postaci $\langle a, f(a)\rangle$, gdzie $a \in A$. Powyższe uwagi prowadzą do następującej definicji.

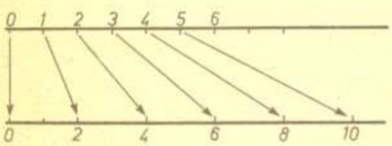


Rys. 1

Zbiory X i Y są równoliczne (równej mocy, oznaczenie: $X \sim Y$), jeśli istnieje różnowartościowa funkcja przekształcająca zbiór X na zbiór Y.

Definicję równoliczności jako pierwszy podał Bernard Bolzano w roku 1847. Jednakże w pełni zrozumiał znaczenie tego pojęcia i dokładnie je zbadał dopiero w latach 1873—1890 Georg Cantor, twórca teorii mnogości.

Pojęcie równoliczności ma sens dla dowolnych zbiorów i, jak widzieliśmy, w przypadku zbiorów skończonych oznacza po prostu posiadanie tej samej liczby elementów. Zauważmy też, że jeśli $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, to $X \sim Z$ (sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikowi). Przyglądając się zbiorom nieskończonym natrafiamy jednakże na nowe zjawisko: zbiór może być równoliczny ze swoim podzbiorem właściwym. Przykładowo, funkcja $f(n) = 2n$ ustala równoliczność zbioru $\mathbf{N}$ liczb naturalnych ze zbiorem liczb parzystych (rys. 2).



Rys. 2

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych nazywamy przeliczalnymi. Przeliczalność zbioru X oznacza możliwość ponumerowania wszystkich jego elementów i ustawienia ich w ciąg nieskończony $x_0, x_1, \ldots$, w którym wyrazy się nie powtarzają. Różnowartościowa funkcja z $\mathbf{N}$ na X jest właśnie taką numeracją: wystarczy położyć $x_n = f(n)$. Tak więc nie tylko zbiór liczb parzystych, ale w ogóle każdy nieskończony zbiór złożony z liczb naturalnych jest przeliczalny (dlaczego?). Z drugiej strony, zbiory intuicyjnie znacznie „większe" od zbioru liczb naturalnych też mogą być przeliczalne. Przykładem takiego zbioru jest zbiór liczb wymiernych. Oczywiście ustawienie wszystkich liczb wymiernych w ciąg nie ma nic wspólnego z ich naturalnym porządkiem według wielkości.

O istnieniu odpowiedniości wzajemnie jednoznacznej między liczbami naturalnymi a ich kwadratami wiedział już Galileusz w roku 1638. Wyciągnął stąd wniosek, że aksjomat „całość jest większa od części" nie może być zastosowany do zbiorów nieskończonych.

Pora zatem zapytać, czy w ogóle istnieją zbiory nieskończone, które nie są przeliczalne? Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, a podstawowy przykład stanowi zbiór $\mathbf{R}$ liczb rzeczywistych. Żeby tego dowieść, pokażemy, że żaden nieskończony ciąg liczbowy nie wyczerpuje wszystkich liczb rzeczywistych. Dla dowolnego danego ciągu $(x_n : n \in \mathbf{N})$ znajdziemy mianowicie liczbę a, której w tym ciągu nie ma. Utwórzmy najpierw rozwinięcia dziesiętne liczb $x_0, x_1, \ldots$ W każdym z rozwinięć będzie nas interesować jedynie ciąg złożony z cyfr od 0 do 9 występujący po przecinku. Wypiszmy więc te ciągi kolejno:

$$\begin{array}{l} c_0^0, c_1^0, c_2^0, \ldots \\ c_0^1, c_1^1, c_2^1, \ldots \\ c_0^2, c_1^2, c_2^2, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Jeśli przy tym liczba ma dwa rozwinięcia (np. 0,500... = 0,499...), to wypisujemy jeden po drugim obydwa odpowiadające jej ciągi. Chcemy znaleźć liczbę a w postaci $0, a_0 a_1 a_2 \ldots$ Będzie ona różna od wszystkich liczb $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$, o ile tylko ciąg $a_0, a_1, \ldots$ będzie różny od wszystkich wypisanych powyżej ciągów. Połóżmy więc dla $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } c_n^n = 9, \\ c_n^n + 1, & \text{jeśli } c_n^n \neq 9. \end{cases}$$

Taka definicja gwarantuje, że dla każdego $n \in \mathbf{N}$ ciągi $a_0, a_1, \ldots$ i $c_0^n, c_1^n, \ldots$ są różne, gdyż różnią się n-tym wyrazem!
Tym samym dowód jest zakończony.

Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy zbiorami mocy continuum. Przykładem zbioru mocy continuum jest dowolny przedział liczbowy (z końcami lub bez jednego bądź obu końców). Dowód tego faktu rozbijemy na trzy kroki:

Rozwiązanie zadania F 209. Niech x będzie grubością lodu po czasie t. Ponieważ proces nie zachodzi bardzo szybko, temperatura w warstwie lodu będzie zmieniała się liniowo od temperatury topnienia $T_0 = 0°C$ do temperatury otoczenia $T = -10°C$. Utrata ciepła z jednostki powierzchni lodu w krótkim czasie Δt jest równa $\varkappa \frac{T_0 - T}{x} \Delta t$ i towarzyszy jej przyrost grubości lodu o Δx. Wynika stąd równość

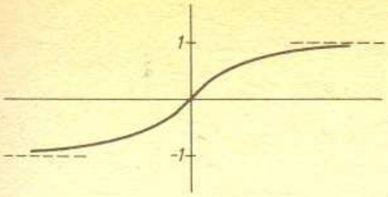
$$\varkappa \frac{T_0 - T}{x} \Delta t = L\varrho \Delta x,$$

a po przejściu granicznym $\Delta t \to 0$ równanie różniczkowe

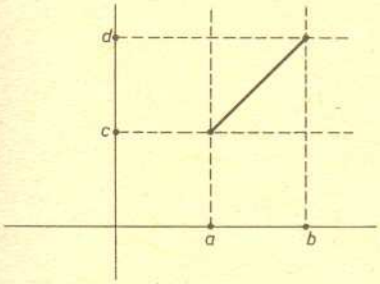
$$\frac{dt}{dx} = \frac{L\varrho}{\varkappa(T_0 - T)} x.$$

Rozwiązanie tego równania (przy założeniu, że dla $t = 0$, $x = 0$) daje szukaną grubość warstwy lodu

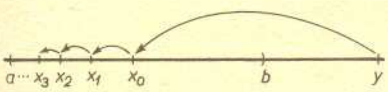
$$x = \sqrt{\frac{2t\varkappa(T_0 - T)}{L\varrho}} \simeq 8 \text{ cm}.$$



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5. Funkcja f musi przeprowadzać punkt y na pewien punkt $x_0 \in P$, punkt x_0 na pewien punkt $x_1 \in P \setminus \{x_0\}$, ten z kolei na punkt $x_2 \in P \setminus \{x_0, x_1\}$ itd. — stąd bierze się nasza definicja.

1. Przedział otwarty $(-1, 1)$ ma moc continuum.
Równoliczności **R** z $(-1, 1)$ dowodzi funkcja:

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{dla } x \in \mathbf{R} \text{ (rys. 3).}$$

2. Każde dwa przedziały otwarte są równoliczne.
Jeśli bowiem mamy dane liczby a,b,c,d, gdzie $a < b$ i $c < d$, to funkcja liniowa:

$$g(x) = \frac{c-d}{a-b}x + \frac{ad-bc}{a-b}$$

przekształca różnowartościowo przedział (a, b) na przedział (c, d) (rys. 4).

3. Jeśli P jest przedziałem, a y dowolną liczbą spoza P, to $P \cup \{y\} \sim P$, tzn. dołączenie jednego elementu nie zmienia mocy przedziału.
Weźmy bowiem dowolny różnowartościowy ciąg $(x_n : n \in \mathbf{N})$ elementów P (jeśli a i b są końcami P i $a < b$, to można np. położyć $x_n = a + \frac{b-a}{n+2}$ dla $n = 0, 1, \ldots$). Zdefiniujmy (rys. 5):

$$f(x) = \begin{cases} x_0 & \text{jeśli } x = y \\ x_{n+1} & \text{jeśli } x = x_n \\ x & \text{dla pozostałych punktów przedziału } P. \end{cases}$$

Funkcja f przekształca $P \cup \{y\}$ różnowartościowo na P.

Punkty 1, 2 i 3 są udowodnione. Jeśli teraz mamy dane dowolne liczby a i b, $a < b$, to:

$$(a, b) \sim \mathbf{R} \text{ na mocy 1 i 2,}$$
$$(a, b) \sim [a, b),\ (a, b) \sim (a, b] \text{ i } (a, b) \sim [a, b] \text{ na mocy 3.}$$

Każdy przedział ma więc „tyle samo elementów" co cały zbiór liczb rzeczywistych.

Następny przykład jest jeszcze bardziej zaskakujący. Wiadomo dobrze, że istnieje wzajemnie ednoznaczna odpowiedniość między liczbami rzeczywistymi a punktami prostej (oś liczbowa). Prosta ma więc moc continuum. Z kolei położenie punktu na płaszczyźnie określamy za pomocą dwóch liczb rzeczywistych — współrzędnych w ustalonym układzie współrzędnych.

Cantor przez trzy lata usiłował udowodnić, że zbiór punktów prostej nie jest równoliczny ze zbiorem punktów płaszczyzny. Gdy przekonał się, że jest przeciwnie, napisał w liście do Dedekinda: „Widzę, że tak jest, ale nie wierzę".

Okazuje się jednak, że ... zbiór punktów płaszczyzny też ma moc continuum!
Znaczy to, że do określenia położenia punktu na płaszczyźnie wystarczy jedna współrzędna!

Dla dowodu ustalmy na danej płaszczyźnie pewien układ współrzędnych prostokątnych. Zauważmy najpierw, że kwadrat $K = \{\langle x, y \rangle : 0 < x \leqslant 1 \text{ i } 0 < y \leqslant 1\}$ jest równoliczny z płaszczyzną. Jeśli bowiem f jest jakąkolwiek funkcją przekształcającą różnowartościowo przedział $(0, 1]$ na **R**, to funkcja

$$g(\langle x, y \rangle) = \langle f(x), f(y) \rangle \quad \text{dla } x, y \in K$$

przekształca różnowartościowo K na całą płaszczyznę. Ponieważ przedział $(0, 1]$ ma moc continuum, więc wystarczy pokazać, że $K \sim (0, 1]$. Znowu posłużymy się rozwinięciami dziesiętnymi. Dla uniknięcia niejednoznaczności używajmy wyłącznie rozwinięć, w których występuje po kolei nieskończenie wiele cyfr różnych od zera. Weźmy więc punkt $\langle x, y \rangle \in K$ i niech:

$$x = 0,x_0x_1x_2\ldots$$
$$y = 0,y_0y_1y_2\ldots$$

Wśród matematyków znany jest pomysł hotelu Hilberta o nieskończonej liczbie miejsc. W tym hotelu zawsze znajdzie się miejsce dla spóźnionego podróżnego — wystarczy każdego z dotychczasowych gości przenieść do pokoju o numerze o jeden większym niż zajmowany poprzednio.

Chcemy mu przyporządkować liczbę $z = 0,z_0z_1z_2\ldots$ należącą do przedziału $(0, 1]$. Jak to zrobić? Problem sprowadza się do tego, by z pary nieskończonych ciągów: $(x_n : n \in \mathbf{N})$ i $(y_n : n \in \mathbf{N})$ utworzyć jeden ciąg $(z_n : n \in \mathbf{N})$. Najprościej byłoby przeplatać kolejne wyrazy danych ciągów dostając w wyniku ciąg: $x_0y_0x_1y_1x_2y_2\ldots$ Ta metoda jest jednak zła, gdyż zdefiniowana na jej podstawie funkcja nie przekształcałaby K na $(0, 1]$. Przykładowo, na liczbę 0, 1010... nie przeszedłby żaden punkt z K. Można jednak przeplatać nie pojedyncze wyrazy, lecz całe ich bloki. Odpowiednie bloki otrzymamy stawiając w naszych ciągach kreski po każdym wyrazie różnym od zera. Na przykład parze liczb:

Wyjaśnienie zagadki ze strony 14, dotyczącej zadania 1 z XXVII MOM.
Zbiór $S \cup \{d\}$ nadal ma własność: dla dowolnych różnych liczb a, b należących do S liczba $ab-1$ jest pełnym kwadratem.

$$x = 0,1|2|03|004|\ldots,\quad y = 0,08|5|9|0002|\ldots$$

przyporządkujemy liczbę $z = 0,108250390040002\ldots$

Czytelnikowi pozostawiamy sprawdzenie, że tak określona funkcja przekształca różnowartościowo K na $(0, 1]$.

Zainteresowanemu Czytelnikowi polecamy do dalszej lektury książkę Wacława Sierpińskiego *Wstęp do teorii mnogości i topologii* oraz książkę Kazimierza Kuratowskiego pod tym samym tytułem.

Powróćmy do pytania, od którego zaczęliśmy. Wiemy już, że odpowiedź na nie jest twierdząca. Znamy przykłady zbiorów przeliczalnych i zbiorów mocy continuum. Czy mogą jednak istnieć zbiory nieprzeliczalne innej jeszcze mocy? Okazuje się, że tak. Świat zbiorów nieskończonych jest bardzo bogaty. Zachęcamy Czytelnika do lepszego poznania rządzących nim praw.