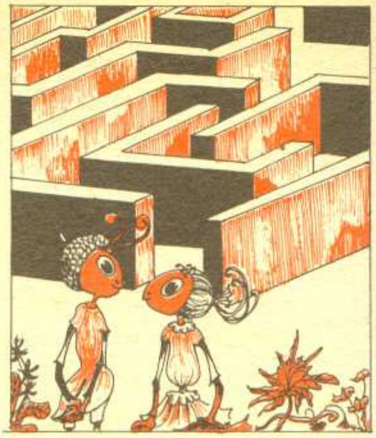
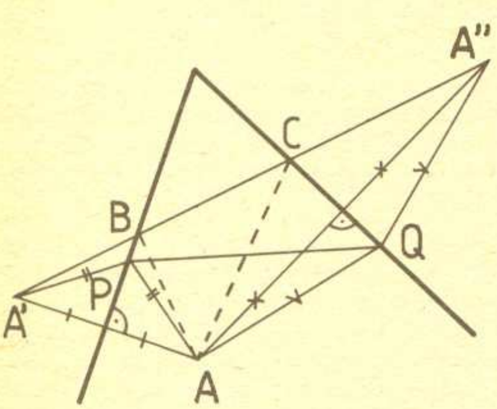
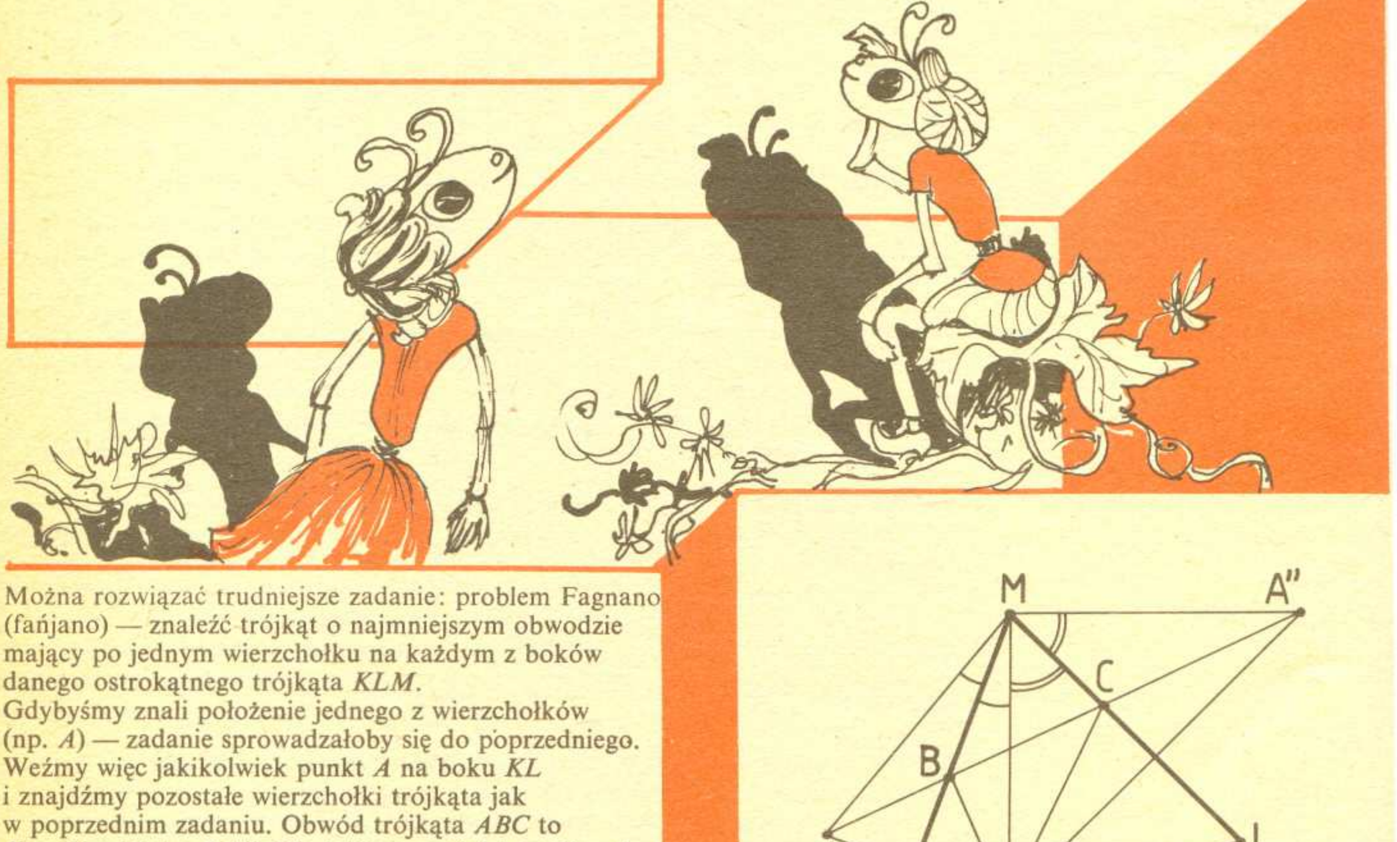
mała delta



NAJKRÓCEJ

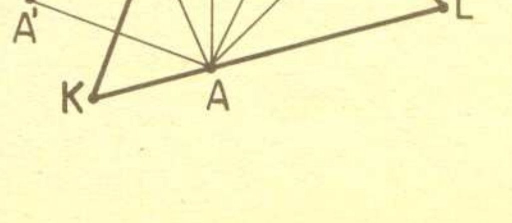


Aby znaleźć trójkąt o najmniejszym obwodzie, który ma jeden wierzchołek w punkcie A wewnątrz danego kąta ostrego, a dwa pozostałe na ramionach tego kąta
— odbijamy punkt A symetrycznie względem tych ramion otrzymując punkty A' i A'',
— poszukiwane wierzchołki B i C znajdujemy w przecięciach odcinka $A'A''$ z ramionami kąta.
Istotnie, wybierając na ramionach kąta dowolne punkty P i Q stwierdzamy, że obwód trójkąta APQ ma tę samą długość co łamana $A'PQA''$, a ta jest najkrótsza, gdy $P = B$ i $Q = C$, ponieważ odcinek jest krótszy od innych łamanych łączących jego końce.

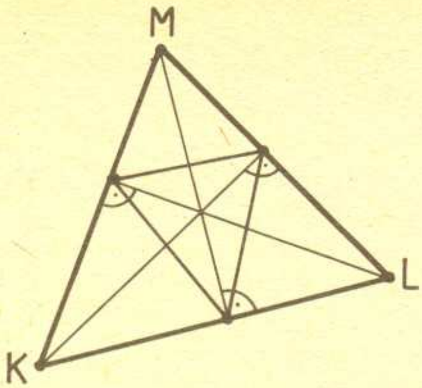


Można rozwiązać trudniejsze zadanie: problem Fagnano (fańjano) — znaleźć trójkąt o najmniejszym obwodzie mający po jednym wierzchołku na każdym z boków danego ostrokątnego trójkąta KLM.
Gdybyśmy znali położenie jednego z wierzchołków (np. A) — zadanie sprowadzałoby się do poprzedniego. Weźmy więc jakikolwiek punkt A na boku KL i znajdźmy pozostałe wierzchołki trójkąta jak w poprzednim zadaniu. Obwód trójkąta ABC to długość odcinka $A'A''$. Dla jakiego spośród możliwych punktów A odcinek ten będzie najkrótszy?
Zauważmy, że $MA' = MA = MA''$. Trójkąt $A'MA''$ jest więc równoramienny i

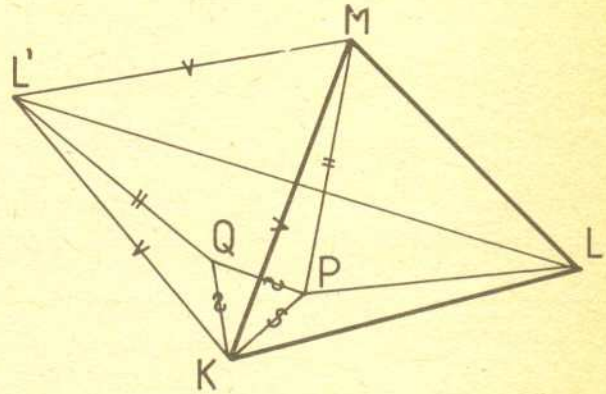
$$A'A'' = 2A'M\sin\frac{\sphericalangle A'MA''}{2} = 2AM\sin\sphericalangle KML.$$

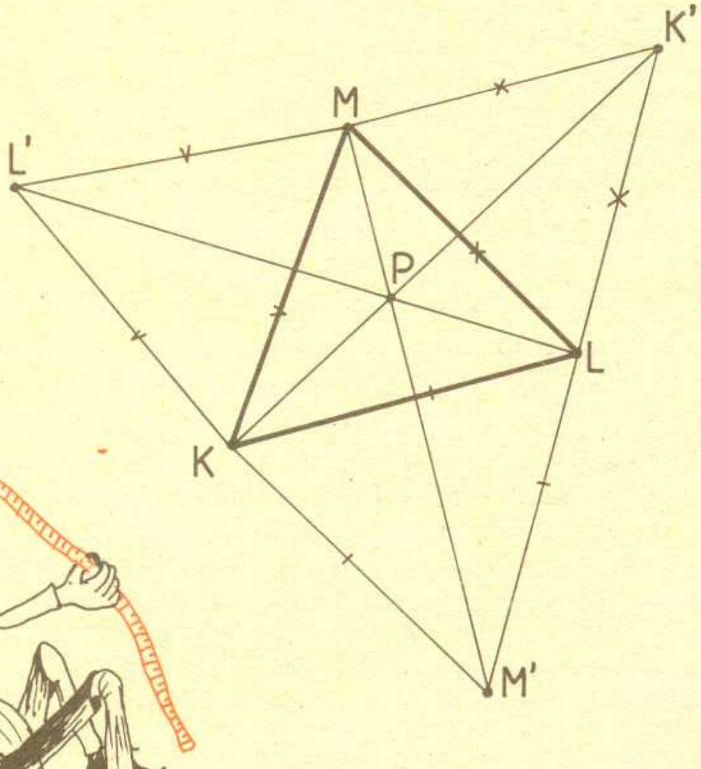


Zatem odcinek $A'A''$ jest najkrótszy, gdy najkrótszy jest odcinek AM. Tak więc rozwiązaniem problemu Fagnano jest tzw. trójkąt spodkowy — o bokach łączących punkty przecięcia wysokości z przeciwległymi bokami.



I jeszcze jedno zadanie: problem Fermata — w trójkącie ostrokątnym znaleźć punkt, którego suma odległości od wierzchołków będzie najmniejsza. Weźmy w trójkącie KLM dowolny punkt P i obróćmy trójkąt KPM o 60° otrzymując trójkąt KQL'. Powstaną dwa trójkąty równoboczne KPQ i KML'. W szczególności $PL+PK+PM = LP+PQ+QL'$, a zatem suma odległości punktu P od wierzchołków trójkąta jest równa długości łamanej $LPQL'$. Szukany punkt musi więc leżeć na odcinku LL'.





Ze względu na symetrię założeń szukany punkt leżeć musi na każdym z odcinków łączących wierzchołek trójkąta z wierzchołkiem trójkąta równobocznego zbudowanego na przeciwległym boku. Tylko czy te trzy odcinki przecinają się w jednym punkcie?

Tak rzeczywiście jest. Dla tych, którzy sami chcieliby przekonać się o tym, podajemy inny sposób znalezienia najlepszego punktu P. Łamana $LPQL'$ jest odcinkiem, gdy

$$\sphericalangle KPL = \sphericalangle KQL' = 120^\circ.$$

Wystarczy więc znaleźć przecięcie łuku okręgu, z którego odcinek KL widać pod kątem 120°, z takimż łukiem dla odcinka ML i najlepszy punkt P jest znaleziony. Przy okazji odkryliśmy jeszcze jedną własność ostatniego rysunku: przecinające się w punkcie P odcinki dzielą płaszczyznę na jednakowe kąty.

Małą Deltę opracował Marek KORDOS