Kącik olimpijski

Przy rozwiązywaniu niektórych zadań z geometrii bardzo wygodnym narzędziem jest rachunek wektorowy. Oto jego zalety:
1° Wiele pojęć geometrycznych łatwo jest wyrazić za pomocą wektorów, np.: równoległość, prostopadłość, długość odcinka, pole trójkąta.
2° Rachunek wektorowy podlega prawom zwykłej algebry.

Jako przykład rozwiążemy zadanie 4 z zawodów III stopnia XVIII Olimpiady Matematycznej.

Przekątne pewnego czworokąta płaskiego, którego kolejne boki mają długości a, b, c, d, są prostopadłe. Udowodnić, że przekątne dowolnego czworokąta płaskiego, którego kolejne boki mają długości a, b, c, d, są prostopadłe.

Rozwiązanie. Niech $ABCD$ będzie dowolnym czworokątem płaskim. Obliczymy iloczyn skalarny $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ wektorów, utworzonych przez jego przekątne.

$$AD^2 = \overrightarrow{AD}^2 = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})^2 = \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2+$$
$$+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD} = AB^2+CD^2-BC^2+$$
$$+2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}) = AB^2+CD^2-BC^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD},$$

a stąd $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(AD^2+BC^2-AB^2-CD^2)$.

Okazuje się, że iloczyn ten zależy tylko od długości boków czworokąta. Ponieważ prostopadłość przekątnych jest równoważna zerowaniu się tego iloczynu, więc w czworokącie, którego boki równe są bokom wyjściowego czworokąta, przekątne też muszą być prostopadłe, c.n.d.

Podamy teraz kilka zadań dla Czytelników.

1. Dane są w przestrzeni punkty A, B, C, D. Niech M oznacza środek odcinka $\overline{AC}$, zaś N — środek odcinka $\overline{BD}$. Udowodnić, że

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4MN^2.$$

(zadanie 8 z II Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

2. Dana jest w przestrzeni kula K i punkty A, B poza kulą takie, że odcinek $\overline{AB}$ przecina wnętrze kuli. Udowodnić, że zbiór tych punktów P, dla których odcinki $\overline{AP}$ i $\overline{BP}$ są styczne do kuli K, zawarty jest w pewnej płaszczyźnie.
(zadanie 3 z zawodów II stopnia XXXI Olimpiady Matematycznej)

3. Udowodnić, że jeżeli punkt P przebiega okrąg wpisany w trójkąt ABC, to wartość $a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2$ jest stała (a, b, c są odpowiednio długościami boków leżących naprzeciw wierzchołków A, B, C).

(6-II-XXXI)

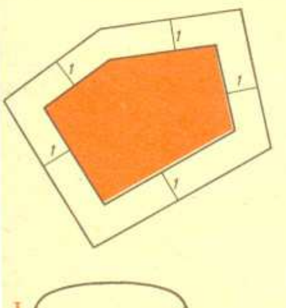
4. Dana jest kula i wewnątrz niej punkt P. Punkty A, B, C są takimi dowolnymi punktami powierzchni tej kuli, że odcinki $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ są parami prostopadłe. Niech $\overline{PQ}$ będzie przekątną wewnętrzną prostopadłościanu wyznaczonego przez odcinki $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$. Wyznaczyć zbiór punktów Q.
(zadanie 2 z XX Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej)

Sławomir TOMASZEWSKI

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 451. Znaleźć liczbę dziesięciocyfrową, której pierwsza cyfra jest zarazem liczbą zer w jej zapisie dziesiętnym, druga liczbą jedynek i tak aż do ostatniej cyfry, która jest liczbą dziewiątek.
Rozwiązanie na str. 7



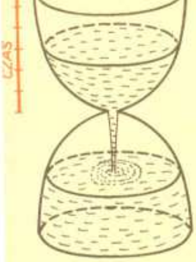
M 452. Niech X będzie zmienną losową, przyjmującą wartości całkowite nieujemne, o następującej własności

$$P(X \geqslant m+n | X \geqslant m) = P(X \geqslant n) \text{ dla } m, n \in \mathbb{N}.$$

Znaleźć rozkład X.
Rozwiązanie na str. 7

M 453. Boki wielokąta wypukłego o obwodzie p „rozsunięto" o 1. Udowodnić, że przyrost pola jest większy niż $p+\pi$.
Rozwiązanie na str. 6

Redaguje mgr Maciej JĘDRZEJCZAK



F 208. Jaki kształt powinna mieć klepsydra (rysunek) wypełniona wodą, aby skala czasu była liniowa?
Rozwiązanie na str. 6

F 209. Jakiej grubości warstwa lodu utworzy się na spokojnej powierzchni jeziora w ciągu 12 godzin, jeśli temperatura powietrza wynosi $-10°C$, a początkowa temperatura wody $0°C$. Współczynnik przewodnictwa cieplnego lodu $\varkappa = 2{,}2$ J/K·s·m, ciepło topnienia $L = 3{,}4\times10^5$ J/kg, a gęstość $\varrho = 900$ kg/m^3.
Rozwiązanie na str. 4