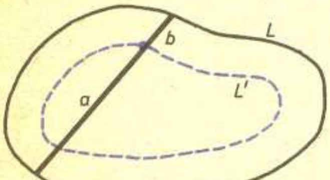
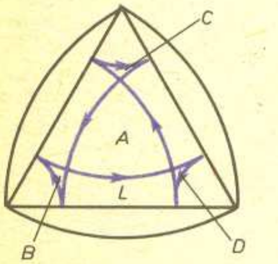
O polach zakreślanych przez punkty ruchomego odcinka

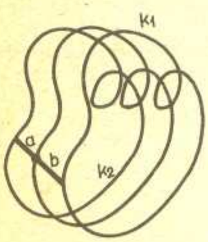
Dr Arkadiusz PŁOSKI



Twierdzenie Holditcha: Jeśli oba końce odcinka przemieszczają się po krzywej zamkniętej L, a punkt podziału odcinka w stosunku $a:b$ zakreśla krzywą L', to różnica pól figur ograniczonych krzywymi L i L' jest równa πab.



Trójkąt Reuleaux jest ograniczony trzema łukami o środkach w wierzchołkach trójkąta równobocznego i promieniach równych bokowi tego trójkąta. Jeśli punkt wewnętrzny odcinka, którego końce poruszają się po trójkącie Reuleaux, zakreśla krzywą L jak na rysunku, to pole algebraiczne obszaru ograniczonego przez nią jest równe $A \setminus B \setminus C \setminus D$.



W artykule zamieszczonym w *Delcie* 8/1984 P. Kenderow i K. Kolarow przypomnieli twierdzenie Holditcha ilustrując je ciekawymi przykładami. Twierdzenie to występuje również jako ćwiczenie podane wraz z rozwiązaniem w *Wykładach rachunku różniczkowego i całkowego* R. Couranta. W przekładzie rosyjskim drugiego tomu tego podręcznika (Moskwa 1970) znajduje się ono w serii ćwiczeń do rozdziału piątego poświęconego całkom krzywoliniowym i powierzchniowym. Naszym celem jest przedstawienie faktu będącego dość naturalnym uogólnieniem twierdzenia Holditcha; jego dowód przeprowadzimy wzorując się na cytowanej książce R. Couranta.

Załóżmy, że odcinek ślizga się po płaszczyźnie w ten sposób, że po pewnym czasie wraca do położenia wyjściowego, przy czym płaszczyzna sztywno związana z odcinkiem wykonuje względem nieruchomej płaszczyzny n pełnych obrotów (n może być dowolną liczbą całkowitą, gdyż obroty w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara liczymy jako ujemne). W trakcie ruchu odcinka każdy jego punkt zakreśla krzywą ograniczającą obszar o pewnym polu. Pole to należy rozumieć jako „pole algebraiczne", a więc obliczone ze współczynnikiem uwzględniającym liczbę i zwrot obiegów poruszającego się punktu. Dobrym przykładem jest opisane przez P. Kenderowa i K. Kolarowa pole zakreślone przez punkt odcinka wymiatającego trójkąt Reuleaux.

Twierdzenie. Jeśli końce odcinka zakreślają krzywe K_1 i K_2 ograniczające pola S_1 i S_2, a punkt leżący w odległościach $a > 0$ i $b > 0$ od jego końców zakreśla krzywą K, to pole ograniczone krzywą K jest równe

$$S = \frac{aS_1 + bS_2}{a+b} - \pi abn.$$

Przy założeniach twierdzenia Holditcha ruchomy odcinek wykonuje jeden obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (a więc wtedy $n = +1$), przy czym oba jego końce zakreślają tę samą krzywą ograniczającą pole $S_1 = S_2$. Stosując nasze twierdzenie otrzymujemy związek: $S_1 - S = \pi ab$.

Okazuje się, że dowód podanego twierdzenia jest bardzo prosty, jeśli tylko należycie określimy pojęcia w nim występujące. Aby to zrobić, musimy użyć rachunku różniczkowego i całkowego, nie będziemy jednak wykonywać złożonych rachunków; wystarczy nam znajomość samych pojęć pochodnej i całki. Chcąc przedstawić nasze argumenty w krótki sposób posłużymy się rachunkiem wektorowym: punkty płaszczyzny będziemy przedstawiać za pomocą ich wektorów wodzących $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$ Równoległobok (z wyróżnionym porządkiem ramion) jest więc określony przez podanie pary wektorów $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, a jego pole $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ma następujące własności:

(1) $[\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}]$,

(2) $[k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = k[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$,

(3) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$,

(4) istnieje para jednostkowych wzajemnie prostopadłych wektorów $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ taka, że $[\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}] = +1$.

Warunki (1)—(4) przyjmujemy dalej jako aksjomatyczną definicję pola równoległoboku. Pole trójkąta o ramionach $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ definiujemy jako $1/2[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Płaszczyzna, w której określono pole równoległoboku, spełniające warunki (1)—(4), nazywa się płaszczyzną zorientowaną. Można sprawdzić, że płaszczyznę da się zorientować dokładnie na dwa sposoby (warunki (1)—(4) wyznaczają pole z dokładnością do znaku). W dalszym ciągu zakładamy, że płaszczyzna jest zorientowana. Zajmiemy się teraz formalnym opisem ruchu, przy czym ograniczymy się do przypadku, w którym ruchomy obiekt powraca do położenia wyjściowego. Wektorem ruchomym $\boldsymbol{r}$ nazywamy gładką funkcję wektorową określoną w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$ i spełniającą warunek $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(2\pi)$ (przedział $\langle 0, 2\pi \rangle$ może być zastąpiony przez jakikolwiek inny, nasz wybór został podyktowany wygodą rachunkową). Argument funkcji $\boldsymbol{r}$ interpretujemy jako czas: mówimy, że wektor ruchomy $\boldsymbol{r}$ zajmuje w chwili $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ położenie $\boldsymbol{r}(t)$. Gładkość oznacza tutaj, że funkcja $\boldsymbol{r}$ ma w każdym punkcie pochodną (oznaczaną dalej $\dot{\boldsymbol{r}}$), tzn. jeśli $\boldsymbol{r}(t) = (a(t), b(t))$, to $\dot{\boldsymbol{r}}(t) = (a'(t), b'(t))$ i że pochodna ta jest funkcją ciągłą. Założenia te można osłabić, ale nie będziemy się nad tym zatrzymywali. Przypomnijmy jeszcze, że $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ interpretujemy w mechanice jako prędkość wektora ruchomego $\boldsymbol{r}$ w chwili t.

Rozwiązanie zadania M 449. Każda z 25 liczb występuje w tabliczce 25 razy, w tym parzystą liczbę razy poza główną przekątną. Wobec tego każda liczba wystąpi na głównej przekątnej nieparzystą liczbę razy, a więc dokładnie raz.

Definicja. Polem zakreślonym przez wektor ruchomy $\boldsymbol{r}$ nazywamy liczbę $\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}[\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)]\,dt$.

Łatwo wskazać intuicję geometryczną objaśniającą przyjętą definicję: pole zakreślone przez wektor $\boldsymbol{r}$ w małym przedziale czasu $\langle t, t+\Delta t\rangle$ jest w przybliżeniu równe polu trójkąta o ramionach $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t+\Delta t)$, tzn. liczbie $\frac{1}{2}[\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t+\Delta t)] = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{r}(t), \frac{1}{\Delta t}(\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t))\right](\Delta t) \cong$

$\cong \frac{1}{2}[\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)]\Delta t$. Aby znaleźć pole zakreślone przez wektor $\boldsymbol{r}$ w całym przedziale czasowym $\langle 0,2\pi\rangle$, sumujemy pola opisanych wyżej trójkątów, a następnie przechodzimy do granicy.

Niech teraz $\boldsymbol{r}$ będzie wektorem ruchomym nie przechodzącym przez początek układu. Założenie to oznacza, że $\boldsymbol{r}(t) \neq \boldsymbol{0}$ dla wszystkich $t \in \langle 0,2\pi\rangle$. Istnieje wówczas funkcja ciągła φ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$ taka, że $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|(\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi)$. Jest ona wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do stałej będącej wielokrotnością liczby 2π. Z warunku $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}(2\pi)$ wynika, że $\varphi(0) = \varphi(2\pi)+2\pi n$ dla pewnej liczby całkowitej n. Liczbę n nazywamy indeksem wektora ruchomego $\boldsymbol{r}$ (nie przechodzącego przez początek układu) względem $\boldsymbol{0}$ i oznaczamy $\mathrm{ind}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{0})$. Indeks $\mathrm{ind}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{0})$ można opisać nieformalnie jako liczbę obiegów wektora $\boldsymbol{r}$ względem początku układu. Zainteresowany tym pojęciem Czytelnik znajdzie szczegółowy i przystępny wykład podstawowych własności indeksu w książce A. Birkholca *Analiza matematyczna dla nauczycieli*.

Lemat. Jeżeli wektor ruchomy $\boldsymbol{r}$ nie przechodzi przez początek układu, to

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{[\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)]}{\boldsymbol{r}(t)^2}\,dt = \mathrm{ind}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{0}).$$

Dowód. Niech φ będzie taką funkcją ciągłą, że $\boldsymbol{r} = |\boldsymbol{r}|(\boldsymbol{i}\cos\varphi+\boldsymbol{j}\sin\varphi)$. Z założenia, że $\boldsymbol{r}$ jest funkcją gładką, wynika istnienie i ciągłość pochodnej $\dot{\varphi}$. Łatwo sprawdzić, że $[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}] = \boldsymbol{r}^2\dot{\varphi}$, a więc

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{[\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)]}{\boldsymbol{r}(t)^2}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\dot{\varphi}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\varphi(2\pi)-\varphi(0)) = \mathrm{ind}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{0}).$$

Możemy teraz nadać ścisły sens wypowiedzi naszego twierdzenia i udowodnić je. Odcinkiem ruchomym o długości $d > 0$ będziemy nazywać parę wektorów ruchomych $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ taką, że $|\boldsymbol{r}_1(t)-\boldsymbol{r}_2(t)| = d$ dla wszystkich $t \in \langle 0,2\pi\rangle$. Liczbą pełnych obrotów odcinka ruchomego $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ nazywamy indeks $\mathrm{ind}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{0})$. Aby udowodnić twierdzenie, rozważmy odcinek ruchomy $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ o długości $a+b$ $(a > 0, b > 0)$ i oznaczmy $\boldsymbol{r} = \frac{a}{a+b}\boldsymbol{r}_1+\frac{b}{a+b}\boldsymbol{r}_2$. Jest to więc wektor wodzący punktu leżącego w odległościach $a > 0$ i $b > 0$ od końców odcinka ($|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1| = b$ oraz $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2| = a$). Zgodnie z przyjętą definicją pola mamy:

$$\int\limits_0^{2\pi}[\boldsymbol{r}_k(t), \dot{\boldsymbol{r}}_k(t)]\,dt = 2S_k \quad \text{dla} \quad k = 1, 2 \quad \text{oraz} \quad \int\limits_0^{2\pi}[\boldsymbol{r}(t), \dot{\boldsymbol{r}}(t)]\,dt = 2S.$$

Z drugiej strony stosując udowodniony lemat do wektora $\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ i uwzględniając fakt, że $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)^2 = (a+b)^2$, otrzymujemy

$$\int\limits_0^{2\pi}[\boldsymbol{r}_2(t)-\boldsymbol{r}_1(t), \dot{\boldsymbol{r}}_2(t)-\dot{\boldsymbol{r}}_1(t)]\,dt = 2\pi(a+b)^2 n.$$

Całkując łatwą do sprawdzenia tożsamość

$$[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}] = \frac{a}{a+b}[\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_1]+\frac{b}{a+b}[\boldsymbol{r}_2, \dot{\boldsymbol{r}}_2]-\frac{ab}{(a+b)^2}[\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2-\dot{\boldsymbol{r}}_1]$$

i wstawiając do otrzymanej równości obliczone wyżej całki dostajemy tezę twierdzenia.

Rozwiązanie zadania F 206. Po wychyleniu z położenia równowagi (punkt 0 na rysunku) na windę zaczyna działać siła przyciągania grawitacyjnego F skierowana do środka pierścienia. W punkcie odległym o x od 0 siła ΔF przyciągania windy przez mały element pierścienia o masie ΔM_i ma wartość

$$\Delta F_i = -G\frac{\Delta M_i m}{R^2+x^2}$$

i jest skierowana pod kątem α do osi, przy czym

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Stąd rzut ΔF_i na oś pierścienia

$$\Delta F_i = -G\frac{\Delta M_i m x}{(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

Wypadkowa sił pochodzących od wszystkich mas ΔM_i jest więc równa

$$F = -G\frac{Mmx}{(R^2+x^2)^{3/2}}.$$

Ponieważ rozmiary pierścienia są dużo większe od długości cylindra, siła przyciągająca jest w przybliżeniu proporcjonalna do wychylenia

$$F \simeq -G\frac{Mm}{R^3}x = -kx.$$

Ruch windy jest w tym przybliżeniu ruchem harmonicznym o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{MG}}.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy $T \simeq 18$ dni. Jak widać, pomysł takiego napędu windy trzeba odrzucić.