Najprostsze zadanie matematyki

Mgr Winfried JUST

Wyznaczyć liczbę elementów danego skończonego zbioru X — oto najbardziej elementarne zadanie matematyki. Wszyscy pamiętamy z pierwszej klasy szkoły podstawowej niezawodną metodę rozwiązywania tego problemu i na tym można by ten artykuł zakończyć, gdyby nie to, że każdy człowiek dysponuje tylko ograniczoną liczbą palców i ograniczonym czasem.

Rozważmy dla przykładu następujący problem: Na ile sposobów można n złotych podzielić między k osób? Żeby to zadanie przetłumaczyć na język matematyki, oznaczmy przez $P(n, k)$ liczbę k-elementowych ciągów liczb naturalnych $(m_i)_{i=1}^{k}$ takich, że $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Zadaniem naszym jest wyznaczenie $P(n, k)$. „Liczeniu na palcach" odpowiada tu następujące rozumowanie: m_1 może przybierać dowolną wartość od 0 do n; przy założeniu, że $m_1 = l$ możemy wartość m_2 ustalić na $n-l$ sposobów; jeśli wiadomo, że $m_1 = l_1$, $m_2 = l_2$, to m_3 może przyjąć jedną z $n-l_1-l_2$ wartości, itd. Przy takim postępowaniu musielibyśmy rozpatrywać $P(n, k)$ przypadków. Na razie jeszcze nie wiemy, jak długo by to trwało, ale na wszelki wypadek rozejrzyjmy się za efektywniejszym sposobem obliczenia $P(n, k)$.

Zauważmy przede wszystkim, że jeśli pierwsza osoba otrzymała l złotych, to mamy jeszcze $n-l$ złotych do podziału między $k-1$ osób. Zapisując tę obserwację formalnie otrzymujemy

$$(1) \qquad P(n, k) = \sum_{l=0}^{n} P(n-l, k-1).$$

Zależność tego typu nazywa się zależnością rekurencyjną. Pozwala ona na obliczenie $P(n, k)$, jeśli znamy $P(m, k-1)$ dla wszystkich $m \leqslant n$. Zatem możemy $P(n, k)$ obliczyć w następujący sposób:

Najpierw zauważmy, że $P(m, 1) = 1$ dla wszystkich $m \geqslant 1$. Obliczamy $P(m, 2)$ ze wzoru (1) za pomocą m dodawań dla wszystkich $m \leqslant n$, potem kolejno $P(m, 3)$, $P(m, 4)$, ..., $P(m, k-1)$ dla wszystkich $m \leqslant n$. W ostatnim kroku obliczamy $P(n, k)$ ze wzoru (1) za pomocą n dodawań.

Przy takim sposobie obliczania $P(n, k)$ musimy dokonać łącznie $(k-2) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$ dodawań.

Spróbujmy, czy nie można tego zrobić jeszcze prościej.
Obliczmy najpierw liczbę takich podziałów, nazwijmy je „sprawiedliwymi", przy których każda osoba otrzymuje co najmniej jedną złotówkę. Oznaczmy przez l_j sumę pieniędzy, którą łącznie otrzyma pierwsze j osób, czyli

$$l_j = \sum_{i=1}^{j} m_i.$$

Jasne, że $l_1 < \ldots < l_{k-1} < l_k = n$, o ile tylko podział jest „sprawiedliwy". W ten sposób przyporządkowaliśmy każdemu podziałowi „sprawiedliwemu" $(k-1)$-elementowy podzbiór $\{l_1, \ldots, l_{k-1}\}$ zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$, i to w sposób wzajemnie jednoznaczny. Czyli jest $\binom{n-1}{k-1}$ takich podziałów. Ale nie wszystkie podziały są „sprawiedliwe", co gorsza, może w ogóle nie być takich, mianowicie wtedy, kiedy $k > n$. Stosujemy tu trik: Pożyczymy k złotych, podzielimy $n+k$ złotych „sprawiedliwie" między k osób, a potem szybciutko zabierzemy każdej osobie po złotówce. Pozostałe n złotych jest już podzielone w sposób dowolny, więc otrzymaliśmy wzór

$$(2) \qquad P(n, k) = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, kiedy nam nikt nie pożyczy, ale tę drażliwą kwestię zostawmy ekonomistom. Nas bardziej interesuje pytanie, w czym ostatnie rozwiązanie jest lepsze od poprzedniego. Można oczywiście powiedzieć, że otrzymaliśmy elegancki wzór, który wyraża $P(n, k)$ w sposób jawny, ale elegancja jest kwestią gustu i „jawność" wzoru pojęciem nader umownym, pamiętajmy wszakże, iż symbol $\binom{n}{k}$ również może być zdefiniowany w sposób rekurencyjny:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \text{ przy czym } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Ale spróbujmy obliczyć $P(100,5)$. Stosując wzór (1) musielibyśmy w tym celu wykonać $3\cdot\frac{100\cdot 101}{2}+100 = 15\,250$ operacji dodawania, a ze wzoru (2) otrzymujemy wynik za pomocą pięciu mnożeń i jednego dzielenia:

$$P(100,5) = \binom{104}{4} = \frac{104\cdot 103\cdot 102\cdot 101}{2\cdot 3\cdot 4} = 4\,598\,126;$$

ta ostatnia liczba pokazuje, ile palców musielibyśmy mieć, żeby policzyć na nich $P(100,5)$. Wzór (2) jest więc nie tylko ładny, lecz daje równocześnie szybki sposób obliczenia $P(n, k)$. Nie wszystkie eleganckie wzory jednak mają tę przyjemną własność. Dla przykładu rozpatrzmy następujące zagadnienie:

Mamy n różnych prezentów i chcemy nimi obdarować naszych k przyjaciół, przy czym każdy z nich ma otrzymać przynajmniej jeden prezent. Oznaczmy przez $F(n, k)$ liczbę sposobów, na które można tego dokonać. Zauważmy najpierw, że dla dowolnych $n, k \geqslant 1$ zachodzi:

$$F(n, k) = k\big(F(n-1, k-1)+F(n-1, k)\big). \tag{3}$$

Żeby udowodnić wzór (3), załóżmy, iż jeden spośród tych n prezentów jest najnowszym numerem *Delty*. Jeśli już podjęliśmy decyzję, który z naszych k przyjaciół ma zostać jego szczęśliwym posiadaczem, możemy albo uznać, że najnowszy numer *Delty* jest tak ciekawy, iż osoba nim obdarowana już nie będzie zwracać uwagi na ewentualne dalsze prezenty, a zatem należy pozostałe $n-1$ prezentów podzielić między pozostałych $k-1$ osób, co możemy uczynić na $F(n-1, k-1)$ sposobów; albo możemy uznać, że nasz przyjaciel powinien jeszcze coś oprócz *Delty* dostać, a wtedy mamy $F(n-1, k)$ możliwości rozdzielenia pozostałych prezentów. Stąd otrzymujemy wzór (3).
Zauważmy jeszcze, że

$$F(n, 0) = 0, \quad \text{jeśli} \quad n \neq 0 \quad \text{oraz} \quad F(n, k) = 0, \quad \text{jeśli} \quad k > n. \tag{4}$$

Przyjmując dodatkowo, że $F(0, 0) = 1$, możemy ze wzorów (3) i (4) obliczyć kolejno: $F(1, 1), F(2, 1), F(2, 2), F(3, 1), \ldots, F(k, k), F(k+1, 1), \ldots, F(k+1, k), F(k+2, 1), \ldots, F(n, k)$.
„Kosztuje" nas to $kn-\frac{k(k-1)}{2}$ mnożeń i tyleż dodawań.

Z drugiej strony zachodzi zadziwiająca zależność:

$$F(n, k) = \big((e^t-1)^k\big)^{(n)}(0) \quad (f^{(n)} \text{ oznacza } n\text{-tą pochodną funkcji } f). \tag{5}$$

Powyższy wzór można udowodnić przez indukcję:
Skoro $(e^t-1)^0 \equiv 1$, to otrzymujemy:

$$((e^t-1)^0)^{(n)} = \begin{cases} 1 \text{ dla } n = 0 \\ 0 \text{ dla } n > 0. \end{cases}$$

Jeśli zaś $k > 0$, to $((e^t-1)^k)^{(0)}(0) = ((e^t-1)^k)(0) = 0$, czyli udowodniliśmy wzór (5) dla przypadków, kiedy $n = 0$ lub $k = 0$.
Załóżmy teraz, że (5) zachodzi dla $F(n-1, k)$ i $F(n-1, k-1)$. Wtedy $((e^t-1)^k)^{(n)}(0) = (((e^t-1)^k)')^{(n-1)}(0) = (k(e^t-1)^{k-1}e^t)^{(n-1)}(0) = k((e^t-1)^{k-1}\cdot(e^t-1+1))^{(n-1)}(0)$ $= k(((e^t-1)^k)^{(n-1)}(0)+((e^t-1)^{k-1})^{(n-1)}(0)) = k(F(n-1, k)+F(n-1, k-1)) = F(n, k)$, co kończy dowód wzoru (5).

Udowodniony przed chwilą wzór jest niewątpliwie bardzo elegancki, ale gdybyśmy chcieli obliczyć $F(n, k)$ różniczkując funkcję $(e^t-1)^k$ n-krotnie, a potem obliczając wartość otrzymanej n-tej pochodnej w zerze, zajęłoby to nam więcej czasu niż obliczanie $F(n, k)$ ze wzorów (3) i (4). Ale ze wzoru (5) można wyprowadzić jeszcze jedno wyrażenie dla $F(n, k)$:

$$((e^t-1)^k)^{(n)}(0) = \left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\cdot e^{t(k-j)}\binom{k}{j}\right)^{(n)}(0) = \left(\sum_{j=0}^{k}\left((-1)^j e^{t(k-j)}\cdot\binom{k}{j}\right)^{(n)}\right)(0) =$$

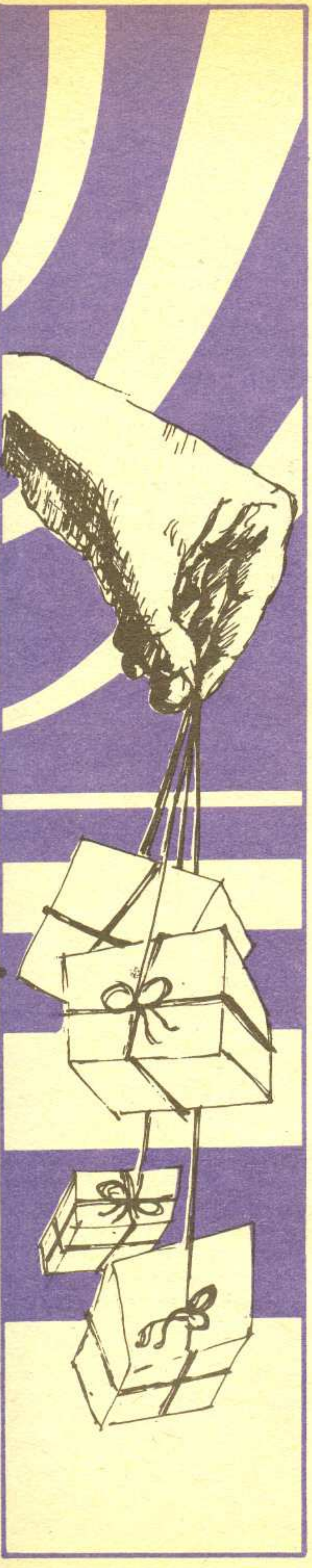
$$= \left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\cdot\binom{k}{j}\cdot(k-j)^n e^{t(k-j)}\right)(0).$$

Czyli otrzymujemy wzór

$$F(n, k) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\cdot\binom{k}{j}\cdot(k-j)^n. \tag{6}$$

Teraz widać, dlaczego bezpośrednie obliczanie $F(n, k)$ z (5) trwa długo — różniczkując bowiem n-krotnie obliczamy każdą potęgę $(k-j)^n$ przez n kolejnych mnożeń, nie mówiąc już o wykonywanych po drodze operacjach różniczkowania i dodawania powstających przy tym składników. Możemy natomiast obliczyć $(k-j)^n$ znacznie szybciej korzystając z zależności:

$$x^{n+m} = x^n\cdot x^m. \tag{7}$$



Również obliczenie $\binom{k}{j}$ we wzorze (6) można uprościć: skoro mamy znaleźć wszystkie współczynniki $\binom{k}{j}$ po kolei, najwygodniej będzie korzystać z zależności:

$$\binom{k}{j+1} = \binom{k}{j} \cdot \frac{k-j}{j+1}. \tag{8}$$

Zastanówmy się na przykład, ile trzeba wykonać operacji, żeby otrzymać $F(64,5)$ ze wzoru (6). Skoro $64 = 2^6$, możemy obliczyć $(5-j)^{64}$ korzystając z (7) za pomocą sześciu mnożeń. Obliczenie zaś wartości kolejnego współczynnika $\binom{5}{j}$ kosztuje nas jedno dzielenie i jedno mnożenie, a $\binom{5}{j}$ trzeba jeszcze pomnożyć przez $(5-j)^{64}$. Skoro nie ma potrzeby obliczenia wartości $(5-5)^{64}$ oraz $(5-4)^{64}$, musimy w sumie dokonać 35 mnożeń, 5 dzieleń i 5 dodawań.
W obu rozważanych przez nas przykładach mieliśmy następujący schemat: Dana jest rodzina zbiorów skończonych $\{X_{n,k}\colon n, k \in \mathrm{N}\}$ oraz znamy oczywistą zależność rekurencyjną, która pozwala na obliczenie mocy zbioru $X_{n,k}$, jeśli znamy moce zbiorów $X_{m,l}$ dla $m < n$, $l < k$. Naszym zadaniem było znalezienie mniej oczywistego, lecz korzystniejszego z rachunkowego punktu widzenia wyrażenia na liczbę elementów $X_{n,k}$.

Istnienie tak prostych zależności jak (1) albo (3) należy jednak do wyjątków. Może takich związków w ogóle nie być, albo mogą być bardzo skomplikowane.

Dla przykładu powróćmy jeszcze raz do podziałów pieniędzy. Niech $p(n)$ oznacza liczbę możliwych sposobów rozdziału n złotych między n osób tak, aby i-ta osoba otrzymała nie mniejszą kwotę niż $(i+1)$-sza osoba. Inaczej mówiąc, $p(n)$ oznacza ilość nierosnących ciągów liczb naturalnych $(m_i)_{i=1}^{n}$ takich, że $\sum_{i=1}^{n} m_i = n$.

Szwajcarski matematyk Leonhard Euler, który jako pierwszy rozważał ten problem, znalazł następujący wzór rekurencyjny:

$$p(n) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1}\left(p\left(n-\frac{1}{2}\,m(3m-1)\right)+p\left(n-\frac{1}{2}\,m(3m+1)\right)\right) \tag{9}$$

(gdzie oczywiście $p(x) = 0$ dla $x < 0$).

Wzór (9) bynajmniej nie jest oczywisty i jego dowód wymaga trudnych środków analitycznych. Problemowi wyznaczenia $p(n)$ poświęcono dziesiątki rozpraw matematycznych, a w dwudziestym wieku znaleziono wzór wyrażający $p(n)$ przez całkę pewnej funkcji analitycznej po konturze zamkniętym w dziedzinie liczb zespolonych!

Rozwiązanie zadania F 207. Potraktujmy stację kosmiczną i obiekt jako punkty materialne o masach m i M. Inercjalny układ odniesienia umieśćmy w punkcie, w którym znajdowała się początkowo masa M. Całkowity pęd jest w tym układzie równy

$$p_1 = mv.$$

Gdy masy osiągną maksymalne oddalenie, ich prędkość względna będzie równa zeru, a więc obie będą się poruszały w wybranym układzie odniesienia z tą samą prędkością V. Całkowity pęd będzie wtedy równy

$$p_2 = (m+M)V.$$

Z zasady zachowania pędu otrzymujemy

$$mv = (m+M)V.$$

Zasada zachowania energii daje

$$\frac{mv^2}{2} - G\,\frac{mM}{d} = \frac{(m+M)V^2}{2} - G\,\frac{mM}{x},$$

gdzie x jest szukaną maksymalną odległością. Z dwóch ostatnich równań wynika, że

$$x = \frac{1}{\dfrac{1}{d} - \dfrac{v^2}{2G(M+m)}}.$$

Prędkość ucieczki otrzymujemy z warunku $x \to \infty$. Jest ona równa

$$v_u = \sqrt{\frac{2G(M+m)}{d}}$$

i dla $m \ll M$ praktycznie nie zależy od masy mniejszego ciała.