

Rys. 1. Dysk Feynmana.

W drugim tomie wykładów Feynmana w rozdziale siedemnastym autor podaje czytelnikom do rozwiązania pewien paradoks, który później zyskał miano „paradoksu dysku Feynmana”. Feynman proponuje, aby rozważyć cienką kolistą plastikową tarczę, która może się swobodnie obracać wokół osi (rys. 1). Na tarczy współosiowo znajduje się solenoid, przez który przepływa prąd elektryczny czerpany z małej baterii, także umieszczonej na tarczy. Konstrukcję uzupełniają kilka małych metalowych kulek umieszczonych w pobliżu brzegu tarczy i izolowanych od siebie i od solenoidu. Każda z kulek jest naładowana ładunkiem elektrycznym Q . Niech tak skonstruowany dysk spoczywa.

Przypuśćmy teraz, że bateria została odłączona od solenoidu. Przerwanie prądu w obwodzie spowoduje zanik znajdującego się wewnątrz solenoidu, równoległego do osi tarczy pola magnetycznego. Pojawi się zatem, zgodnie z prawem indukcji elektromagnetycznej Faradaya, indukowane pole elektryczne. Linie sił tego pola będą okręgami współśrodkowymi z osią tarczy. W efekcie naładowane kulki na obwodzie tarczy doznają działania pewnej siły elektrycznej, stycznej do obwodu. Tak więc zanik prądu w solenoidzie spowoduje obrót tarczy i pojawienie się momentu pędu. Przeczy to jednej z fundamentalnych zasad zachowania w fizyce, a mianowicie zasadzie zachowania momentu pędu.

To nagle pojawienie się momentu pędu tarczy nie jest efektem mechanicznym wynikającym z jakiegoś szczególnego sposobu realizacji wyłączenia prądu w solenoidzie. Rozwiązanie paradoksu leży w stwierdzeniu, iż pole elektromagnetyczne ma swój własny moment pędu, który po zaniku prądu przekazywany jest tarczy.

Moment pędu pola elektromagnetycznego wyraża się wzorem

$$(1) \quad L_{EM} = \epsilon_0 \int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} d\mathbf{z},$$

gdzie \mathbf{E} jest natężeniem pola elektrycznego, \mathbf{B} — indukcją pola magnetycznego w punkcie \mathbf{r} , a ϵ_0 jest przenikalnością dielektryczną próżni.

Przed wyłączeniem prądu mamy wewnątrz solenoidu pole magnetyczne \mathbf{B} wytworzone przez poruszające się elektrony i pole elektryczne \mathbf{E} naładowanych kulek znajdujących się na obwodzie tarczy. Zatem L_{EM} jest różny od zera. Przerwanie prądu w obwodzie solenoidu spowoduje zanik pola magnetycznego, a więc zanik L_{EM} . Jednak całkowity moment pędu układu nie zmieni się, bo na jego miejsce pojawi się moment pędu tarczy. Dowód tego, iż moment pędu pola elektromagnetycznego i moment pędu tarczy są równe, przeprowadził przy użyciu złożonej analizy wektorowej G. G. Lombardii.

Zaproponowano również nieco inny eksperyment, który można łatwiej przeanalizować. Nieskończenie długi solenoid o promieniu R , w którym płynie prąd I , umieszczony jest współosiowo między dwiema rurami (o promieniach a i b i długości $l \gg b > a$) naładowanymi równomiernie ładunkami $-Q$ i $+Q$ (rys. 2). Rury mogą się swobodnie obracać wokół wspólnej osi.

W chwili początkowej obie rury spoczywają, czyli ich moment pędu jest równy zeru. Wyłączmy w pewnym momencie prąd w solenoidzie. Spowoduje to zanik równoległego do osi pola magnetycznego \mathbf{B} . Powstanie indukowane pole elektryczne, które działając na ładunki umieszczone na powierzchni rur spowoduje ich obrót w przeciwne strony. Mechaniczny moment pędu rur będzie równy momentom sił scałkowanym po czasie

$$(2) \quad |L_{ma}| = \int aQ E_a dt, \quad |L_{mb}| = \int bQ E_b dt,$$

gdzie E_a i E_b to pole elektryczne działające odpowiednio na wewnętrzną i zewnętrzną rurę. Zgodnie z prawem Faradaya

$$(3) \quad E_a = \frac{d\Phi_a/dt}{2\pi a} = \pi a^2 \frac{dB/dt}{2\pi a} = a \frac{dB/dt}{2},$$

$$E_b = \frac{d\Phi_b/dt}{2\pi b} = \pi R^2 \frac{dB/dt}{2\pi b} = R^2 \frac{dB/dt}{2b}.$$

Podstawiając te wartości do (2) otrzymamy

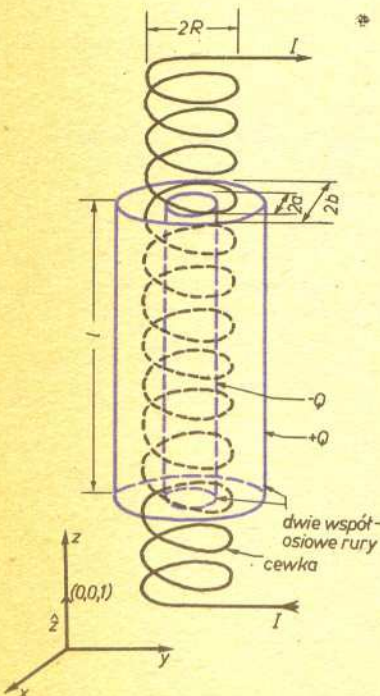
$$(4) \quad |L_{ma}| = \int Qa^2 dB/2 = Qa^2 B/2, \quad |L_{mb}| = \int QR^2 dB/2 = QR^2 B/2,$$

gdzie L_{mb} ma zwrot osi solenoidu \hat{z} , a L_{ma} — przeciwny; B jest początkową wartością pola magnetycznego wewnątrz solenoidu. Zatem całkowity moment pędu po wyłączeniu prądu jest równy

$$(5) \quad L_m = L_{mb} - L_{ma} = \frac{QB(R^2 - a^2)}{2} \hat{z}.$$

Obliczmy teraz moment pędu pola elektromagnetycznego przed wyłączeniem prądu w solenoidzie. Zgodnie z przyjętymi warunkami pole magnetyczne istniało tylko wewnątrz solenoidu. Natomiast pole elektryczne jest równie zeru wszędzie poza obszarem między rurami i, jak wynika z prawa Gaussa, ma ono wartość $E = Q/(2\pi\epsilon_0 r l)$ i kierunek radialny. Zatem

G. G. Lombardii, *American Journal of Physics* 51(1983)str. 213.



Rys. 2



całkowanie we wzorze (1) rozciągać się będzie na obszar, w którym istnieją jednocześnie pola E i B . Wykorzystując symetrię kołową opisanego układu możemy napisać

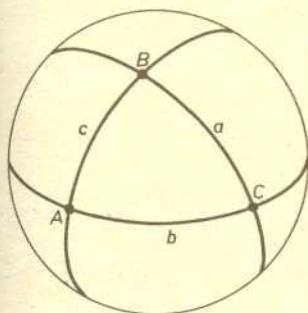
$$(6) \quad L_{EM} = \hat{z} \varepsilon_0 \int_a^R \frac{rQB(2\pi rl)}{2\pi \varepsilon_0 r l} dr = \frac{QB(R^2 - a^2)}{2} \hat{z}.$$

Wykazaliśmy, iż istotnie moment pędu pola równy jest mechanicznemu momentowi pędu rur, który pojawia się po wyłączeniu prądu w solenoidzie. Zasada zachowania momentu pędu nie została naruszona.

Istnieją inne, bardziej dostępne obserwacji zjawiska, w których ujawnia się moment pędu pola elektromagnetycznego. Rozważmy na przykład elektron w modelu atomu Bohra. Ma on określony, w zależności od stanu, w którym się znajduje, moment pędu L_R . Jeśli za pomocą elektromagnesu wytworzymy jednorodne pole magnetyczne B prostopadłe do płaszczyzny orbity, to pole elektryczne elektronu i pole magnetyczne zgodnie z relacją (1) dadzą moment pędu równy $L_{EM} = -er^2B/2$, gdzie r jest promieniem orbity elektronu w modelu Bohra. Zatem zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu dla zrównoważenia powstałego L_{EM} elektron zyska w polu dodatkowy mechaniczny moment pędu $\Delta L_m = -L_{EM}$. Moment magnetyczny stowarzyszony z tym momentem pędu jest równy $m = -e\Delta L_m/(2m_e) = -e^2r^2B/(4m_e)$, a więc ma kierunek przeciwny do kierunku pola B . Jest to tzw. indukowany moment diamagnetyczny. Pojawienie się w obecności pola B dodatkowego momentu pędu ΔL_m oznacza, że elektron obraca się z dodatkową częstością $\omega_p = |\Delta L_m|/(mr^2) = e|B|/(2m)$ zwaną częstością Larmora. Tak więc diamagnetyzm można uważać za konsekwencję zasady zachowania momentu pędu.

Na zakończenie zauważmy, że skoro pole elektromagnetyczne niesie pewien moment pędu, nie powinien nikogo dziwić fakt, iż foton, który jest kwantem tego pola, ma własny moment pędu (spin). Poza tym warto pamiętać, że obiekt fizyczny nie będący w ruchu może mieć pewien moment pędu. „Dysk Feynmana” jest tego przykładem.

Kącik olimpijski



Weźmy trzy punkty A, B, C na sferze nie leżące na jednym kole wielkim. Przez każde dwa z nich poprowadźmy koło wielkie sfery. Te trzy koła wielkie dzielą sferę na 8 części zwanych trójkątami sferycznymi. Kąty $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$ między stycznymi do łuków kół wielkich nazywamy kątami trójkąta sferycznego, a łuki $c = \overset{\frown}{AB}, a = \overset{\frown}{BC}, b = \overset{\frown}{CA}$ kół wielkich — jego bokami (mierzymy je w radianach).

Przy takim podziale sfery jeden z trójkątów ma wszystkie boki i kąty mniejsze od π . Taki trójkąt nazywamy eulerowski. Między jego bokami i kątami zachodzą związki:

- (1) $b - c < a < b + c, a + b + c < 2\pi,$
- (2) $\pi < A + B + C < 3\pi.$

Wzór sinusów

$$(3) \quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Wzory cosinusów

$$(4) \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Wzory cotangensów

$$(5) \quad \sin c \operatorname{ctg} a - \sin b \operatorname{ctg} A = \cos c \cos B, \\ \sin c \operatorname{ctg} b - \sin a \operatorname{ctg} B = \cos c \cos A.$$

Analogiczne wzory otrzymujemy dla pozostałych boków i kątów.

Rozwiążmy teraz zadanie 6 z trzeciego etapu XXXIII OM — używając jednego z powyższych wzorów.

Udowodnić, że w dowolnym czworościanie suma wszystkich kątów dwuściennych jest większa od 2π .

Opiszemy najpierw pewną ogólną konstrukcję.

Rozpatrzmy niewielką — tzn. przecinającą tylko trzy ściany — sferę o środku w wierzchołku czworościanu. Te trzy ściany (i trzy krawędzie) wyznaczają na sferze boki (i wierzchołki) trójkąta sferycznego eulerowskiego. Miary jego boków to miary kątów płaskich przy wierzchołku, a miary jego kątów to miary kątów dwuściennych. Stosujemy lewą część nierówności (2) do wszystkich wierzchołków czworościanu i sumujemy stronami. Po lewej stronie nierówności będzie 4π , po prawej — podwojona suma wszystkich kątów dwuściennych.

Można zauważyć, że stosując konstrukcję opisaną w rozwiązaniu i wzory (3) — (5) dostajemy przepis na rozwiązanie dowolnego naroża (tzn. okolic wierzchołka czworościanu), o ile tylko mamy wystarczająco dużo danych początkowych.

Zadania

1. Wykazać, że jeśli wszystkie kąty dwuścienne czworościanu są ostre, to wszystkie jego ściany są trójkątami ostrokątnymi.

(zadanie 6 z zawodów III stopnia XXXIV Olimpiady)

2. Udowodnić, że w każdym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym trzy kąty płaskie są ostre.

(10-I-XXVIII)

3. Udowodnić, że suma sześciu kątów, pod którymi widać krawędzie dowolnego czworościanu z dowolnego jego punktu wewnętrznego, jest większa od 540° .

(zadanie 3 z III Austriacko-Polskich Zawodów Matematycznych)

4. Udowodnić, że jeżeli wszystkie ściany czworościanu są trójkątami przystającymi, to te trójkąty są ostrokątne.

(12-I-XII)

Marek GAŁECKI