Do Redakcji

Z zapartym tchem przeczytałem w „trójce" żarcik zatytułowany „Cudowna własność liczby $((2\sqrt{13}-5)\sqrt{2\sqrt{13}+22})/54$", a przedstawiający dowód twierdzenia Williamsa (1937) mówiącego, że max $\left\{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\gamma : \alpha, \beta, \gamma \text{ — kąty trójkąta}\right\} =$ Liczba z Tytułu.

Iloczyn, który maksymalizujemy, został oznaczony przez R, a następnie przekształcony do postaci

$$R = \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

i dalej, przez podstawienie $\alpha = x+z$, $\beta = x-z$, $y = \cos x$, $k = 1-\cos z$ do postaci

$$R = y\sqrt{-y^4+2y^3-2y+1} - ky\sqrt{1-y^2}.$$

Następuje zdanie: „standardowe metody (zróżniczkować i przyrównać do zera...) raczej zawodzą. Chyba że ktoś z Czytelników..." Potraktowałem to jako wyzwanie. A zróżniczkuję! Oczywiście nie w tych najnowszych zmiennych (y i k), a w tych „średnio nowych" (x i z). Bowiem

$$R = (\cos z - \cos x)\sin x\cos x.$$

Obszar zmienności: $[\alpha, \beta > 0, \alpha+\beta < \pi] \Leftrightarrow [|z| < x < \pi/2]$.

Rachunki:

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -\sin z\sin x\cos x; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \sin^2 x\cos x + (\cos z - \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \quad [\text{dla } z = 0]$$

$$= (1-\cos^2 x)\cos x + (1-\cos x)(2\cos^2 x - 1) = \quad [\text{ozn. } y = \cos x\ (\neq 1)]$$

$$= (1-y)(3y^2+y-1);$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = 0 = \frac{\partial R}{\partial x} \Leftrightarrow z = 0,\ y = (\sqrt{13}-1)/6.$$

Brzeg obszaru: dla $x = \pi/2$ oraz dla $x = \pm z$ mamy $R = 0$. Stąd

$$R_{max} = (1-y_0)\sqrt{1-y_0^2}\,y_0 \quad [\text{gdzie } y_0 = (\sqrt{13}-1)/6]$$

i nie da się ukryć, że wychodzi Liczba z Tytułu.

A potem przyszła melancholijna refleksja: pojawiające się w oryginalnym rozumowaniu wielomiany czwartego stopnia (pod pierwiastkiem) oraz łańcuch Sturma to majstersztyk, koronkowa robota, przepiękne rękodzieło. My zaś „standardową metodą różniczkowania" to trochę jak taranem we wrota ręcznie rzeźbione przez dawnych snycerzy.

I jeszcze wspomnienie z młodości. Jako student I roku słuchałem wykładu algebry w wykonaniu Profesora Andrzeja Mostowskiego, wielkiego matematyka i Wielkiego Człowieka. Łańcuch Sturma znalazł swoje miejsce w tym wykładzie. Później już nie dane mi było z tą metodą się zetknąć. Ale zapamiętałem! I dzięki temu byłem w stanie zrozumieć rachunki w tym wdzięcznym artykuliku.

Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania powyższego zadania z użyciem rachunku różniczkowego nadesłali nam również
Mikołaj Tyszka z Krakowa,
Zygmunt Bartkowski z Warszawy,
N. Porwal z Zabrza
i Stanisław Łanowy z Gliwic.

Pan Jarosław Wróblewski z Wrocławia zwrócił mi uwagę, że rozwiązanie zadania **M 430** jest błędne. Błąd wynikł z chęci uproszczenia rozwiązania. Przypominam zadanie

M 430. W punkcie 0 na prostej stoi pionek. Rzucamy symetryczną monetą i w zależności od wyniku przesuwamy pionek o jednostkę w lewo lub w prawo. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pionek kiedyś przekroczy milion.

Rozwiązanie. Niech p_k oznacza prawdopodobieństwo tego, że pionek startujący z punktu k przekroczy kiedyś milion. Mamy $p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$ dla $k \leqslant 10^6$, ponieważ po wykonaniu pierwszego ruchu z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ znajdziemy się w punkcie $k+1$, gdzie szansa przekroczenia miliona wynosi p_{k+1} i z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$ w punkcie $k-1$, gdzie szansa przekroczenia miliona wynosi p_{k-1}. Jednocześnie $p_{10^6+1} = 1$. Ciąg $\{p_k\}_{k \leqslant 10^6+1}$ jest ciągiem arytmetycznym, jednak gdyby nie był stały, pewne jego wyrazy byłyby ujemne lub większe od 1. Dlatego $p_k = 1$ dla $k \leqslant 10^6+1$.

Uwaga. Interesujący jest przypadek, gdy moneta nie jest symetryczna. Wtedy rozwiązanie zamieszczone w numerze 4 daje bezsensowną odpowiedź.

R. S.