Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 127 /WT=2,25/ i 128 /WT=3,16/
z numeru 3/1986

Kazimierz Serbin	- Sanok	44,79pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	42,56pkt
Marcin Mazur	- Białystok	42,06pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	41,48pkt
Zbigniew Koza	- Jelenia G.	41,32pkt
Marek Prauza	- Poraj	41,30pkt

Pan Serbin po raz drugi przekracza linię 44 punktów.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 25 /WT=2,61/ i 26 /WT=2,27/

Tomasz Rawlik	- Gliwice	33,80pkt
Aleksander Surma	- Myszków	25,72pkt
Dzierżysław Lipniacki	-Lublin	23,47pkt

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1986

Zadania z matematyki nr 135, 136

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

135. Okręgi K i L są wpisane w ramiona kąta o wierzchołku O. Dany jest ponadto trzeci okrąg styczny zewnętrznie do okręgów K i L odpowiednio w punktach P i Q. Dowieść, że punkty O, P, Q są współliniowe.

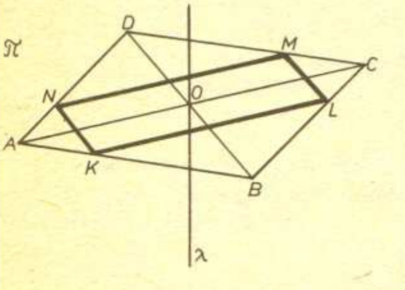
136. Udowodnić, że iloczyn dowolnych czterech
a) kolejnych liczb naturalnych,
b) kolejnych liczb parzystych,
c) kolejnych liczb nieparzystych
można przedstawić na dwa różne sposoby jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych.
Zadanie **136** przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/1986

Przypominamy treść zadań:

131. Przez środki dwóch skośnych krawędzi czworościanu poprowadzono płaszczyznę, rozcinając nią czworościan na dwie części. Jaki może być stosunek objętości tych części?

132. Udowodnić nierówność $(\sum_i \prod_j a_{ij})^k \leqslant \prod_j \sum_i a_{ij}^k$ dla $a_{ij} > 0$ ($i = 1,\ldots,n$; $j = 1,\ldots,k$).



131. Stosunek ten równa się 1, obie części mają równą objętość. Aby to wykazać, weźmy dowolną płaszczyznę π równoległą do obu wyróżnionych krawędzi skośnych i przecinającą czworościan (będzie to płaszczyzna rysunku) i zrzutujmy na nią czworościan równolegle do prostej łączącej środki tych krawędzi. Obrazem czworościanu będzie równoległobok $ABCD$, obrazem wspomnianej prostej — punkt O. Płaszczyzna σ, którą przecięto czworościan, przechodzi przez środki rozważanych dwóch krawędzi, zatem jej obrazem (w tym rzucie równoległym) jest prosta λ przechodząca przez O. Weźmy teraz pod uwagę przekrój czworościanu płaszczyzną π. Krawędzie przecięcia płaszczyzny π ze ścianami czworościanu są równoległe do odcinków $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, zatem przekrój czworościanu płaszczyzną π jest równoległobokiem ($KLMN$ na rysunku), a O jest jego środkiem symetrii. Prosta λ dzieli ten równoległobok na dwie części o równych polach. Płaszczyzna π była dowolnie wybrana z rodziny wszystkich płaszczyzn równoległych do wyróżnionych krawędzi i przecinających czworościan. Znaczy to, że każdy przekrój czworościanu płaszczyzną z tej rodziny jest przez płaszczyznę σ rozcięty na części o równych polach. Na mocy zasady Cavalieriego płaszczyzna σ dzieli czworościan na części o równych objętościach.

132. Oznaczmy: $A_j = (\sum_i a_{ij}^k)^{1/k}$, $x_{ij} = A_j^{-1} a_{ij}$. Dla ustalonego i mamy

$$\prod_j a_{ij} = \prod_j A_j x_{ij} = \Big(\prod_j A_j\Big)\Big(\prod_j x_{ij}\Big) \leqslant \Big(\prod_j A_j\Big)\Big(\frac{1}{k}\sum_j x_{ij}^k\Big)$$

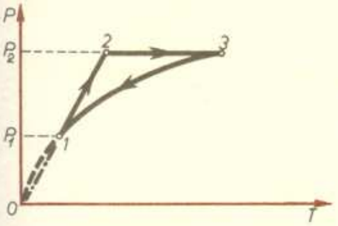
(średnia geometryczna i arytmetyczna). Sumując po $i = 1, \ldots, k$ dostajemy

$$\sum_i \prod_j a_{ij} \leqslant \frac{1}{k}\Big(\prod_j A_j\Big)\Big(\sum_{i,j} x_{ij}^k\Big).$$

Ale $\sum_i x_{ij}^k = A_j^{-k} \sum_i a_{ij}^k = 1$, skąd $\sum_{i,j} x_{ij}^k = k$ i wobec tego $\sum_i \prod_j a_{ij} \leqslant \prod_j A_j$. Podnosząc stronami do k-tej potęgi otrzymujemy tezę zadania.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

33. Jednoatomowy gaz doskonały podlega odwracalnemu procesowi kołowemu, dla którego zależność ciśnienia p od temperatury T jest przedstawiona na wykresie (odcinek 1—3 opisywany jest zależnością $p = \text{const} \cdot \sqrt{T}$).
Podać wykres zależności ciśnienia od objętości dla tego procesu i obliczyć sprawność silnika cieplnego realizującego ten cykl przy założeniu $p_2 = 2p_1$. Czy wynik dla gazu dwuatomowego byłby taki sam?



34. Posługując się argumentacją fizyczną ocenić, jaka część wokółsłonecznego toru Księżyca ma wypukłość zwróconą ku Słońcu. Niezbędne dane, w możliwie jak najmniejszej liczbie, należy wziąć z tablic.

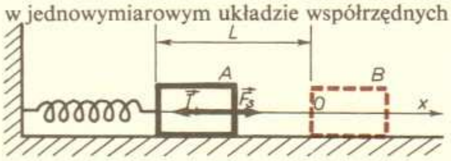
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1986

Przypominamy treść zadań:

29. Klocek o masie m, spoczywający na płaskim, poziomym podłożu, jest połączony sprężyną o stałej sprężystości k ze stałym punktem, jak na rysunku. Sprężynę ściśnięto o odcinek L w stosunku do położenia swobodnego, a następnie puszczono. O jaki odcinek przesunie się klocek po podłożu (do swego pierwszego zatrzymania), jeżeli współczynnik tarcia klocka o podłoże wynosi f. Masę sprężyny należy zaniedbać.

30. Jaki co najmniej powinien być wypadkowy ładunek elektryczny Ziemi wraz z atmosferą, aby (przy założeniu kulisto-symetrycznego rozkładu tego ładunku) występowało elektrostatyczne „wymiatanie" z ziemskiego pola grawitacyjnego (z górnych warstw atmosfery) jednokrotnie dodatnio zjonizowanych atomów wszystkich pierwiastków. Jaką objętość powietrza w warunkach normalnych należałoby całkowicie zjonizować, aby łączny ładunek uzyskanych w ten sposób jonów N^+ i O^+ odpowiadał powyższemu ładunkowi? Niezbędne do obliczeń dane należy wziąć z tablic.

29. Ruch klocka odbywa się w kierunku działania sprężyny. Rozpatrujemy więc ten ruch w jednowymiarowym układzie współrzędnych przedstawionym na rysunku. Oznaczmy wychylenie



A — położenie „startowe" klocka
B — położenie klocka przy luźnej sprężynie

klocka z położenia „neutralnego" (swobodnej sprężyny) przez x, siłę działania sprężyny na klocek przez F_s, siłę tarcia przez T; dodatnie wartości F_s oraz T odpowiadają wektorom tych sił zwróconym zgodnie z osią x. Z definicji stałej sprężystości k wynika $F_s = -kx$. W chwili startowej $x = -L$, co daje $F_s = kL$. Jeśli $kL \leqslant mg$, zachodzi $T = -F_s$ i klocek w ogóle nie ruszy z miejsca. W przypadku, gdy $kL > mg$, zacznie się ruch klocka. Wypadkowa siła działająca na klocek podczas tego ruchu będzie $F = F_s + T = -kx - fmg$. Ponieważ T do momentu pierwszego zatrzymania się klocka jest stałe, można siłę F przedstawić w postaci $F = -k(x - x_0)$, gdzie $x_0 = -\dfrac{fmg}{k}$. Ruch klocka na tym odcinku ma więc charakter ruchu harmonicznego względem położenia x_0. Początkowe wychylenie klocka względem tego położenia wynosi $\varDelta = -L - x_0$. Klocek zatrzyma się w położeniu $-\varDelta$. Przesunie się on więc o odcinek $2|\varDelta| = 2\left(L - \dfrac{fmg}{k}\right)$. Taki sam wynik otrzymamy porównując pracę wykonaną na pokonanie siły tarcia do zmiany energii potencjalnej sprężyny (energia sprężyny rozciągniętej o l jest równa $kl^2/2$).

30. Elektrostatyczne „wymiatanie" naładowanych cząstek występuje wtedy, gdy siła odpychania elektrostatycznego $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qq}{r^2}$ przewyższa siłę przyciągania grawitacyjnego $F_g = \gamma\dfrac{Mm}{r^2}$.
(ε_0 — przenikalność elektryczna próżni, Q — ładunek elektryczny Ziemi, q — ładunek cząstki, r — odległość od środka Ziemi, γ — stała grawitacyjna, M — masa Ziemi, m — masa cząstki).
Z warunku $F_e > F_g$ otrzymujemy $Q > \dfrac{4\pi\varepsilon_0 \gamma M m}{q}$. Widać stąd, że przy jednakowym ładunku q najtrudniej będą wymiatane ciężkie cząstki. Jako m podstawiamy więc masę atomu uranu ^{238}U, równą $4 \cdot 10^{-25}$ kg, jako q — ładunek elementarny (pozostałe wartości znane) i na poszukiwaną wartość krytyczną ładunku Ziemi uzyskujemy 0,1 C. Ładunek ten jest równy $7 \cdot 10^{17}$ ładunków elementarnych i taka powinna być liczba jonów N^+ i O^+. Wymagana liczba atomów zawarta jest w $5 \cdot 10^{-10}$ kmola N_2, O_2 — odpowiada to objętości gazu w warunkach normalnych równej $1 \cdot 10^{-8}$ m^3. Wystarczyłoby więc całkowicie zjonizować zaledwie 10 mm^3 powietrza, aby uzyskać omawiany efekt. Stąd widać, jak wielka jest koncentracja ładunków elektrycznych w przyrodzie i jak dokładnie są one skompensowane: wystarczy bardzo niewielkie odstępstwo od zrównoważenia ładunków przeciwnych znaków, aby wystąpiły kolosalne oddziaływania elektryczne (które tę równowagę przywracają).