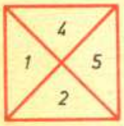
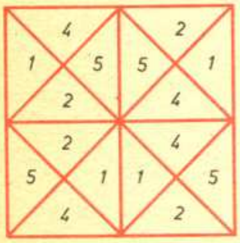
O grze w domino inaczej

Doc. dr Wojciech GUZICKI

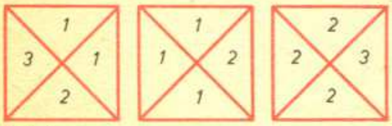


Rys. 1. Sposób napisania liczb na kamieniu wskazuje, gdzie jest góra kamienia.

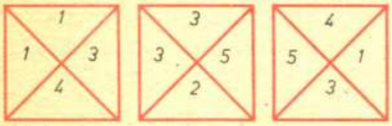


Rys. 2

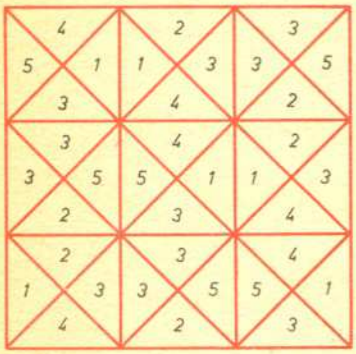
Rys. 3



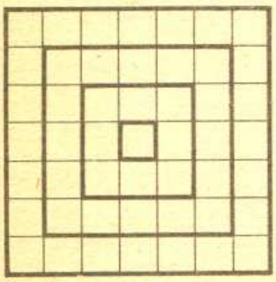
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Każdy potrafi grać w domino. Można jednak tę grę urozmaicić. W listopadowym numerze *Scientific American* z 1965 r. znany logik Hao Wang zaproponował następujące urozmaicenie.

Kamienie domina mają teraz kształt kwadratu 1×1 podzielonego przekątnymi na cztery części, w każdej z tych części znajduje się liczba naturalna, jak np. na rysunku 1. Będziemy dysponować kamieniami różnych typów (mówimy, że dwa kamienie mają ten sam typ, jeśli są na nich napisane te same liczby w tych samych miejscach), przy czym mamy nieskończenie wiele kamieni każdego z posiadanych typów.

Celem gry, tym razem dla jednego gracza, a nie dla kilku (może więc raczej pasjansa, a nie gry?) będzie ułożenie posiadanych kamieni tak, aby zapełnić nimi całą płaszczyznę. Musimy przy tym przestrzegać zasad gry w domino — kamienie stykające się bokami muszą mieć przy tych bokach napisaną tę samą liczbę.

Zadanie to jest bardzo łatwe, jeśli dopuścimy możliwość obracania kamieni. Dla przykładu rysunek 2 pokazuje, jak z kamieni takich jak na rysunku 1 można ułożyć kwadrat 2×2 mający te same liczby na górnej i dolnej oraz na prawej i lewej krawędzi. Taki duży kwadrat można teraz układać obok siebie nieskończenie wiele razy.

To banalne rozwiązanie jest więc, oczywiście, mało interesujące. Przyjmiemy zatem jako regułę gry, że kamieni nie wolno obracać ani przewracać na drugą stronę. Wprowadzimy ponadto dwie definicje. Powiemy, że zbiór typów kamieni jest rozwiązalny, jeśli kamieniami tych typów można zapełnić całą płaszczyznę. Rozwiązanie nazwiemy powtarzalnym, jeśli powstaje w wyniku wielokrotnego powtarzania pewnego prostokąta mającego takie same pary krawędzi: górnej i dolnej oraz prawej i lewej.

Nasuwa się teraz cały szereg pytań, na przykład: czy każdy zbiór typów jest rozwiązalny? Kamień z rysunku 1 daje, oczywiście, przykład zbioru nierozwiązalnego — po położeniu tego kamienia nie można, zgodnie z regułami gry, dołożyć do niego następnego z żadnej strony. Może jednak jeden kamień to za mało, by stanowił zbiór rozwiązalny? Okazuje się, że rozwiązalność zbioru nie zależy od jego wielkości — istnieją nierozwiązalne zbiory nieskończone. Kamienie z rysunku 3 dla kolejnych liczb naturalnych n dają przykład nieskończonego zbioru nierozwiązalnego. Zauważmy jednak, że za ich pomocą z łatwością zapełnimy prawą górną ćwiartkę płaszczyzny.

Po rozpatrzeniu przypadków skrajnych: zbiorów jednoelementowych i nieskończonych zastanówmy się nad możliwymi sytuacjami dotyczącymi zbiorów skończonych. Niektóre z tych zbiorów są rozwiązalne, inne nie. Dla przykładu zbiór trójelementowy z rysunku 4 nie jest rozwiązalny (niech Czytelnik wykaże to!), natomiast zbiór z rysunku 5 jest rozwiązalny. Przykładowe rozwiązanie powtarzalne jest pokazane na rysunku 6. Teraz oczywiście nasuwa się pytanie, czy każdy skończony zbiór rozwiązalny ma rozwiązanie powtarzalne. Odpowiedź brzmi nie i spróbujemy pokazać, dlaczego tak jest. Najpierw pokażemy, że zbiór skończony jest rozwiązalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy kwadrat o boku n można pokryć kamieniami o typach z tego zbioru. Implikacja w prawo jest oczywista. Przypuśćmy teraz, że każdy kwadrat o boku n można pokryć kamieniami z naszego zbioru. Skonstruujemy nieskończony ciąg pokryć kwadratów o bokach $2n+1$ takich, że kwadrat o boku $2n+1$ znajduje się w środku kwadratu o boku $2n+3$ (por. rysunek 7), przy czym pokrycie kwadratu większego jest rozszerzeniem pokrycia kwadratu mniejszego.

Wybierzmy najpierw najmniejszy kwadrat. Otóż — istnieje nieskończenie wiele pokryć wszystkich rozważanych kwadratów dla wszystkich n (bo każdy kwadrat daje się pokryć i jest ich nieskończenie wiele), ale jest tylko skończenie wiele typów kamieni. Jeden typ musi zatem powtórzyć się nieskończenie wiele razy jako typ kamienia leżącego „w samym środku" rozważanego kwadratu o boku $2n+1$. Ten kamień wybieramy jako pokrycie kwadratu o boku 1.

Teraz rozważamy kwadrat o boku 3. Istnieje tylko skończenie wiele sposobów pokrycia go skończoną liczbą typów kamieni. Jednocześnie istnieje nieskończenie wiele sposobów pokryć kwadratów o bokach $2n+1$ zawierających w środku wybrany przez nas kamień (bo tak ten kamień został wybrany). Zatem pewien sposób pokrycia kwadratu o boku 3 powtarza się nieskończenie wiele razy w środku pokryć kwadratów większych. Wybieramy to pokrycie kwadratu o boku 3 (zauważmy, że rozszerza ono wybrane przez nas pokrycie kwadratu o boku 1) i w analogiczny sposób analizujemy następnie sposoby pokrycia kwadratu o boku 5.

Łatwo zauważyć, że kontynuując to rozumowanie skonstruujemy nieskończony ciąg pokryć kolejnych kwadratów, a w konsekwencji pokrycie całej płaszczyzny. Nasz zbiór okaże się rozwiązalny.

Twierdzeniu, które przed chwilą udowodniliśmy, Hao Wang nadał bardziej spektakularną postać: jeśli za pomocą kamieni skończenie wielu typów można pokryć prawą górną ćwiartkę płaszczyzny (skąd łatwo wynika, że można pokryć kwadrat o dowolnym boku), to można tymi kamieniami zapełnić całą płaszczyznę. Pokazuje to istotną różnicę między skończonymi i nieskończonymi zbiorami typów kamieni.

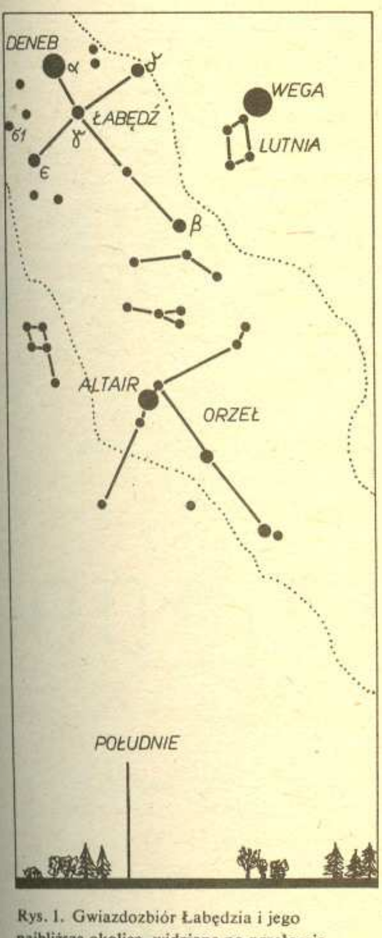
Rozwiązanie zadania F 203. W czasie swobodnego spadku gaz znajduje się w stanie nieważkości. Tuż po przecięciu nici gaz nie jest w równowadze termodynamicznej (różne gęstości na dole i na górze). Średnia energia kinetyczna cząsteczek gazu, określająca jego temperaturę, jest jednak wszędzie jednakowa. Przy przejściu do stanu równowagi gęstości wyrównają się, ale średnia energia kinetyczna cząsteczek pozostanie taka jak na początku.

Teraz przypuśćmy, że każdy zbiór rozwiązalny ma rozwiązanie powtarzalne. Opiszemy algorytm pozwalający na stwierdzenie w skończonej liczbie kroków, czy dany zbiór jest rozwiązalny. Otóż będziemy kolejno analizowali wszystkie możliwe pokrycia kolejnych kwadratów o boku n. Dla pewnego n musimy stwierdzić, że zachodzi jedna z dwóch możliwości:
(1) Kwadrat o boku n nie daje się pokryć. Zgodnie z udowodnionym twierdzeniem ten przypadek zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy nasz zbiór jest nierozwiązalny.
(2) Wewnątrz kwadratu o boku n znajduje się powtarzalny prostokąt. Zgodnie z uczynionym przed chwilą założeniem ten przypadek zajdzie wtedy i tylko wtedy, gdy nasz zbiór jest rozwiązalny (a więc gdy ma rozwiązanie powtarzalne).
Przypadki (1) i (2) wykluczają się wzajemnie i napotkanie jednego z nich określa, czy zbiór jest rozwiązalny, czy też nie jest. Zauważmy wreszcie, że analiza wszystkich pokryć kwadratu o boku n wymaga tylko skończenie wielu kroków — bo takich pokryć jest skończenie wiele. Podobnie skończenie wielu kroków wymaga sprawdzenie, czy dany kwadrat zawiera powtarzalny prostokąt, bo zawiera on tylko skończenie wiele prostokątów.

Dla wykazania, że istnieją zbiory rozwiązalne nie mające rozwiązań powtarzalnych, wystarczy teraz zacytować za Hao Wangiem twierdzenie mówiące, że nie istnieje żaden algorytm pozwalający w skończonej liczbie kroków stwierdzić, czy dany zbiór skończony jest rozwiązalny, czy nie jest. Jako ćwiczenie (trudne!) pozostawmy Czytelnikowi znalezienie zbioru rozwiązalnego, bez rozwiązania powtarzalnego. Autorowi znany jest przykład takiego zbioru składającego się z 92 typów kamieni. Może ktoś znajdzie mniejszy?

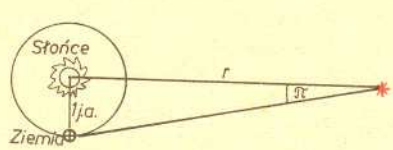
Zainteresowanym podamy jeszcze, że niemożność skonstruowania algorytmu stwierdzającego rozwiązalność zbioru wynika stąd, że dla każdej maszyny Turinga można znaleźć taki skończony zbiór typów, że ta maszyna zatrzymuje się wtedy i tylko wtedy, gdy dany zbiór nie jest rozwiązalny, ale to jest już całkiem inna historia.

Patrz w niebo



Rys. 1. Gwiazdozbiór Łabędzia i jego najbliższa okolica, widziane na przełomie sierpnia i września około godziny 21.

Późnym latem w godzinach wieczornych na południe od zenitu góruje gwiazdozbiór Łabędzia. Bywa on również zwany Krzyżem Północy, ponieważ jego najjaśniejsze gwiazdy układają się niemal dokładnie w kształt krzyża. Łatwiej nawet dopatrzeć się tego kształtu niż w przypadku Krzyża Południa. Prawdziwa nazwa sugeruje jednak wyobrażenie lecącego po Drodze Mlecznej łabędzia o smukłej, wyciągniętej szyi.
Charakterystyczny kształt gwiazdozbioru tworzy pięć jasnych gwiazd (α, β, γ, δ i ε — rys. 1). Najjaśniejsza z nich — Deneb — jest w rzeczywistości gwiazdą-nadolbrzymem o bardzo silnym blasku. Mimo dzielącej nas od niego odległości 1800 lat świetlnych świeci na niebie jako obiekt pierwszej wielkości gwiazdowej.
Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku południowo-wschodniej sąsiadki Deneba — gwiazdy oznaczonej symbolem 61 *Cygni*. Jest to układ podwójny o łącznej, obserwowanej jasności składników zaledwie 4,8 mag. Zaledwie, ponieważ układ znajduje się w stosunkowo niewielkiej odległości od Słońca (11 lat świetlnych), a więc jego rzeczywista jasność jest bardzo mała.
Ta niepozorna gwiazdka zajmuje jednak poczesne miejsce w historii astronomii. W końcu lat trzydziestych ubiegłego stulecia Friedrich Bessel wyznaczył jako jedną z pierwszych jej heliocentryczną paralaksę. Zagadnienie przesunięć paralaktycznych gwiazd wystąpiło dopiero w czasach pokopernikańskich, gdy Ziemi przypisano ruch orbitalny dookoła Słońca. Wysiłki astronomów w kierunku obserwacyjnego wykrycia paralaks gwiazdowych przez trzy wieki były daremne, ponieważ technika obserwacyjna nie pozwalała na pomiary tak małych kątów. Ciekawe, że po tylu latach niepowodzeń przedsięwzięcie to powiodło się niemal jednocześnie niezależnie trzem astronomom. Oprócz Bessela Wilhelm Struve zmierzył paralaksę Wegi (α *Lyrae*), a Thomas Henderson w południowej Afryce wyznaczył tą metodą odległość gwiazdy α *Centauri*.



Rys. 2. Paralaksa gwiazdy jest to kąt, pod którym z gwiazdy „widać" średni promień orbity ziemskiej. Nawet dla najbliższych gwiazd kąt ten jest mniejszy od jednej sekundy łuku. Paralaksa π jest wygodną miarą odległości, gdyż wielkości te związane są prostą zależnością: $r = \frac{1}{\sin \pi}$, gdzie r wyraża się w jednostkach astronomicznych (j.a.).

Przy doborze gwiazdy, której paralaksa ma być zmierzona, należy kierować się pewnymi kryteriami wskazującymi na jej względną bliskość. Struve i Henderson zakładali, że gwiazdy jaśniejsze leżą bliżej niż słabsze, w związku z czym wybrali gwiazdy o dużych jasnościach obserwowanych. Bessel kierował się kryterium, według którego o bliskości gwiazdy świadczy jej duży ruch własny. Jak się później okazało, drugie kryterium jest trafniejsze, o czym świadczy choćby porównanie Deneba i 61 *Cygni*.
Do końca ubiegłego stulecia zmierzono około 100 paralaks gwiazd, co jest wynikiem dobrym, jeśli wziąć pod uwagę, jakie przyrządy były wówczas dostępne obserwatorom. Istotny postęp w tej dziedzinie nastąpił po 1905 roku, gdy Frank Schlesinger opracował stosowaną do czasów współczesnych technikę fotograficzną wyznaczania paralaks gwiazdowych. Liczba gwiazd o dokładnie wyznaczonych tą metodą odległościach sięga około 1000 i wydaje się, że jest to kres obecnych możliwości. Poprawienie dokładności można by osiągnąć stosując teleskop wyniesiony na możliwie daleką orbitę okołosłoneczną, co z jednej strony zwiększyłoby bazę obserwacji, a z drugiej wyeliminowałoby błędy wynikające z niekorzystnego wpływu atmosfery ziemskiej. Paralaksy heliocentryczne są pierwszym ogniwem w łańcuchu wzajemnie połączonych metod wyznaczania odległości obiektów niebieskich. Błędy tej metody pociągają za sobą istotne błędy w określaniu większych odległości: dalszych gwiazd (np. Deneb), galaktyk czy kwazarów.

mgr Joanna UDALSKA