Metoda „wędrującego garbu”

Dr Zbigniew SAWOŃ

W Analizie Matematycznej, w szczególności w dowodach nie wprost, często stosuje się pewną metodę, którą żargonowo nazywa się metodą wędrującego garbu. Jest ona matematycznie finezyjna i nawet jeżeli jest stosowana w podręcznikach Analizy Matematycznej, to autorzy nie zaznaczają tego. Dlatego wydaje się celowe zapoznanie z nią Czytelnika przez podanie przykładu jej zastosowania. Autor sięgnął do przykładu z dziedziny bliskiej jego zainteresowaniom, a mianowicie do Teorii Limesowalności. Autor pozostawia domyślności Czytelnika to, dlaczego ta metoda nosi taką, a nie inną nazwę.

Zaczniemy od rozwiązania pewnego problemu z teorii szeregów bezwzględnie zbieżnych.

Pytanie: Jakie warunki musi spełniać ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, aby dla każdego ciągu $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ (tj. ciągu zbieżnego do zera) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n$ był zbieżny?

Oczywiście każdy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ jest „dobry”.

Przypuśćmy więc, że ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest „dobry” i że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$. Istnieje takie k_1, że $\sum_{n=1}^{k_1} |a_n| > 2^1$, ale $\sum_{n=k_1+1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, więc istnieje takie k_2, że $\sum_{n=k_1+1}^{k_2} |a_n| > 2^2$ i znowu $\sum_{n=k_2+1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, istnieje więc k_3 takie, że $\sum_{n=k_2+1}^{k_3} |a_n| > 2^3$ itd. Można więc określić rosnący ciąg liczb naturalnych $k_1 < k_2 < \ldots < k_i < \ldots$ taki, że

$$\sum_{n=k_i+1}^{k_{i+1}} |a_n| > 2^{i+1} \text{ dla } i = 0, 1, 2, \ldots \text{ (przyjmując } k_0 = 0).$$

Określimy teraz pewien ciąg $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty}$.
Dla każdego $n \in \mathbf{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba $i(n)$ taka, że $k_{i(n)} < n \leqslant k_{i(n)+1}$. Zdefiniujemy

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{i(n)+1} \operatorname{sgn} a_n.$$

$$\operatorname{sgn} a \text{ oznacza znak } a, \text{ tzn. } \operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{dla } a > 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ -1 & \text{dla } a < 0 \end{cases}$$

Jest rzeczą oczywistą, że $t_n^{(0)} \to 0$, tzn. $x_0 \in c_0$. Ale

$$\left| \sum_{n=k_i+1}^{k_{i+1}} t_n^{(0)} a_n \right| = \frac{1}{i+1} \sum_{n=k_i+1}^{k_{i+1}} |a_n| \geqslant \frac{1}{i+1} \cdot 2^{i+1} \text{ dla } i = 0, 1, 2, \ldots$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t_n^{(0)}$ nie jest zbieżny (nie spełnia warunku Cauchy'ego).

Szereg $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ spełnia warunek Cauchy'ego, gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ można znaleźć taką liczbę naturalną N, że dla dowolnych liczb naturalnych n, k, przy czym $n > N$, zachodzi $\left| \sum_{j=n}^{n+k} c_j \right| < \varepsilon$.
Szereg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.

W ten sposób otrzymaliśmy

Twierdzenie 0. Dla ciągu liczbowego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ następujące warunki są równoważne

(a) dla każdego ciągu $(t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n$ jest zbieżny,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ (tzn. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny).

Definicja. Mówimy, że macierz liczbowa $A = (a_{k,n})_{k,n=1,2,\ldots}$ jest macierzą Toeplitza, jeżeli dla każdego ciągu $x = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$

(1) szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} t_n$ jest zbieżny, gdy $k = 1, 2, \ldots$

(2) $\lim_{k \to \infty} A_k(x) = 0$, gdzie $A_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} t_n$.

Czytelniku, sprawdź, które z następujących macierzy są macierzami Toeplitza.

1) $a_{k,n} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{dla } n = 1, 2, \ldots, k \\ 0 & \text{dla } n > k \end{cases}$

2) $a_{k,n} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k}} & \text{dla } n = 1, 2, \ldots, k \\ 1 & \text{dla } n = k+1 \\ 0 & \text{dla } n > k+1 \end{cases}$

3) $a_{k,n} = (1-\varrho_k) \cdot \varrho_k^n$, gdzie $(\varrho_k)_{k=1}^{\infty}$ jest ciągiem o wyrazach z przedziału $(0, 1)$ i jest zbieżny do zera.

4) $a_{k,n} = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \alpha_k^{-1} \cdot \varrho_n & \text{dla } n \geqslant k \end{cases}$
gdzie $(\varrho_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem o wyrazach dodatnich i takim, że $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n < +\infty$, a α_k oznacza $\sum_{n=k}^{\infty} \varrho_n$.

Na mocy twierdzenia 0 warunek (1) powyższej definicji jest równoważny warunkowi

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}| < +\infty \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

Oznaczmy przez $e_n \in c_0$ ciąg, którego n-ty wyraz jest równy 1, a pozostałe są zerami. Wówczas $A_k(e_n) = a_{k,n}$, więc z punktu (2) definicji wynika następujący warunek

(ii) $$\lim_{k \to \infty} a_{k,n} = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Warunki (i) oraz (ii) nie są jednak dostateczne. Świadczy o tym następujący przykład

$$a_{k,n}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{gdy} \quad k \neq n \\ n^2 & \text{gdy} \quad k = n \end{cases}$$

Warunki (i) oraz (ii) są oczywiście spełnione, ale przyjmując $t_n^{(0)} = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ stwierdzamy z łatwością, że

$$A_k(x_0) = k \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots$$

W tym przykładzie mamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}^{(0)} = k^2$ dla dowolnego k.

Przypuśćmy teraz, że ciąg $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}| \right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnego j ciąg $\left(\sum_{n=j+1}^{\infty} |a_{k,n}| \right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony, gdyż $\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{j} |a_{k,n}| = 0$ dla każdego j.

Teraz przystępujemy do właściwej pracy.

Istnieje liczba naturalna k_1 taka, że $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{k_1,n}| > 2^2$. Istnieje również j_1 takie, że

$$\sum_{n=1}^{j_1} |a_{k_1,n}| > 2 \text{ i } \sum_{n=j_1+1}^{\infty} |a_{k_1,n}| < 1.$$

Zaczniemy teraz po kawałku określać pewien ciąg $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

Zdefiniujmy $t_n^{(0)} = \frac{1}{1} \operatorname{sgn} a_{k_1,n}, \quad$ dla $1 \leqslant n \leqslant j_1$.

Wtedy oczywiście spełniona jest nierówność

$$\left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_1,n} t_n^{(0)}\right| \geq \frac{1}{1} \cdot 2^1.$$

Ale $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{j_1} a_{k,n} t_n^{(0)} = 0$; istnieje więc k_2' takie, że gdy $k > k_2'$, to $\left|\sum\limits_{n=1}^{j_1} a_{k,n} t_n^{(0)}\right| < 1$. Ponieważ ciąg $\left(\sum\limits_{n=j_1+1}^{\infty} |a_{k,n}|\right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony, więc istnieje k_2 większe od k_2' i k_1 takie, że $\sum\limits_{n=j_1+1}^{\infty} |a_{k_2,n}| > 2^3 + 2 \cdot 2$. Istnieje teraz $j_2 > j_1$ takie, że

$$\sum_{n=j_1+1}^{\infty} |a_{k_2,n}| > 2^2 + 2 \text{ i } \sum_{n=j_2+2}^{\infty} |a_{k_2,n}| < 1.$$

Definiujemy dalej ciąg x_0:

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn} a_{k_2,n} \quad \text{dla } j_1 < n \leq j_2.$$

Otrzymujemy teraz

$$\left|\sum_{n=1}^{j_2} a_{k_2,n} t_n^{(0)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_2,n} t_n^{(0)} + \sum_{n=j_1+1}^{j_2} a_{k_2,n} t_n^{(0)}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_2,n} t_n^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{n=j_1+1}^{j_2} |a_{k_2,n}|\right| \geq \frac{1}{2}(2^2+2) -$$

$$- \left|\sum_{n=1}^{j_1} a_{k_2,n} t_n^{(0)}\right| \geq \frac{1}{2} 2^2 + 1 - 1 = \frac{1}{2} \cdot 2^2.$$

Wykonamy dla wygody czytającego jeszcze jeden krok dla określenia rosnących ciągów liczb naturalnych $(k_l)_{l=1}^{\infty}$ i $(j_l)_{l=1}^{\infty}$ oraz ciągu $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty}$ mając nadzieję, że pozwoli to uchwycić pewne prawidłowości potrzebne do indukcyjnego zdefiniowania tych trzech ciągów.

Wiemy, że $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{j_2} a_{k,n} t_n^{(0)} = 0$, istnieje więc k_3' takie, że gdy $k > k_3'$, to $\left|\sum\limits_{n=1}^{j_2} a_{k,n} t_n^{(0)}\right| < 1$. Ciąg $\left(\sum\limits_{n=j_2+1}^{\infty} a_{k,n}\right)_{k=1}^{\infty}$ jest nieograniczony, można więc znaleźć k_3 większe od k_3' i k_2 takie, że $\sum\limits_{n=j_2+1}^{\infty} |a_{k_3,n}| > 2^4 + 2 \cdot 3$. Istnieje $j_3 > j_2$ spełniające

$$\sum_{n=j_2+1}^{j_3} |a_{k_3,n}| > 2^3 + 3 \text{ i } \sum_{n=j_3+1}^{\infty} |a_{k_3,n}| < 1$$

Definiujemy

$$t_n^{(0)} = \frac{1}{3} \operatorname{sgn} a_{k_3,n} \quad \text{dla } j_2 < n \leq j_3.$$

Postępując jak poprzednio stwierdzamy z łatwością, że

$$\sum_{n=1}^{j_3} a_{k_3,n} t_n^{(0)} \geq \frac{1}{3} \cdot 2^3.$$

W ten sposób można indukcyjnie określić dwa ciągi liczb naturalnych $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$; $j_1 < j_2 < \ldots < j_l < \ldots$ oraz ciąg $x_0 = (t_n^{(0)})_{n=1}^{\infty} \in c_0$ tak, aby

$$\left|\sum_{n=1}^{j_l} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| \geq \frac{1}{l} 2^l \text{ i } \sum_{n=j_l+1}^{\infty} |a_{k_l,n}| < 1 \quad \text{dla } l = 1, 2, \ldots$$

Mamy więc

$$|A_{k_l}(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{j_l} a_{k_l,n} t_n^{(0)} + \sum_{n=j_l+1}^{\infty} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| \geq$$

$$\geq \left|\sum_{n=1}^{j_l} a_{k_l,n} t_n^{(0)}\right| - \sum_{n=j_l+1}^{\infty} |a_{k_l,n}| \cdot |t_n^{(0)}| \geq \frac{2^l}{l} - 1 \quad \text{dla } l = 1, 2, \ldots$$

Zatem $\lim\limits_{l\to\infty} A_{k_l}(x_0) = +\infty$, wbrew założeniu, że A jest macierzą Toeplitza.

W ten sposób otrzymaliśmy trzeci warunek konieczny

(iii) ciąg $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}|\right)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Ponieważ warunek (iii) zawiera warunek (ii), to rekapitulując można powiedzieć, że jeżeli $A = (a_{k,n})_{k,n=1,2,\ldots}$ jest macierzą Toeplitza, to

(*) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k,n} = 0$ dla $k = 1, 2, \ldots,$

(**) istnieje $M > 0$ takie, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_{k,n}| \leq M$ dla $k = 1, 2, \ldots$

Wykażemy teraz, że warunki te są również dostateczne.

Rozważmy $x = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ i $\varepsilon > 0$. Istnieje wówczas $n_0 \in \mathrm{N}$ takie, że $|t_n| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ dla $n > n_0$. Wtedy też dla dowolnych k mamy

$$|A_k(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} t_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_{k,n} t_n\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_{k,n}| \cdot |t_n| \leq \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| + \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M =$$

$$= \left|\sum_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zarazem — ponieważ $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n = 0$, to istnieje k_0 takie, że dla $k > k_0$ mamy $\left|\sum\limits_{n=1}^{n_0} a_{k,n} t_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, czyli $|A_k(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Otrzymaliśmy w ten sposób następujące twierdzenie Toeplitza. Macierz $A = (a_{k,n})_{k,n=1,2,\ldots}$ jest macierzą Toeplitza wtedy i tylko wtedy, gdy

1) $\lim\limits_{k\to\infty} a_{k,n} = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots,$

2) ciąg $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k,n}\right)_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony.

Teraz już z łatwością Czytelnik stwierdzi, że wszystkie podane wcześniej macierze poza jedną były macierzami Toeplitza. A czy następująca modyfikacja przykładu (4)

$a_{k,n} = \alpha k^{-1} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \varrho_n$

daje macierz Toeplitza? A może to jest macierz Toeplitza, gdy nałoży się jakieś dodatkowe warunki na ciąg $(\varrho_n)_{n=1}^{\infty}$?

Definicję macierzy Toeplitza można uogólnić żądając w punkcie (2) zamiast tego, żeby $\lim\limits_{k\to\infty} A_k(x) = 0$ warunku, by $\lim\limits_{k\to\infty} A_k(x)$ istniała dla dowolnych $x \in c_0$. Analiza funkcjonalna dostarcza metod, które w bardzo łatwy sposób pozwalają uogólnić twierdzenie Toeplitza. Okazuje się mianowicie, że warunek 1) trzeba wtedy sformułować w następujący sposób

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,n} = \beta_n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots$$

Można też wykazać, że w tym przypadku dla każdego $x = (t_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ jest

$$\lim_{k\to\infty} A_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n t_n.$$

Autorowi nie jest znany żaden dowód tego faktu wykorzystujący tylko metody Analizy Matematycznej i byłby bardzo wdzięczny Czytelnikom, gdyby któryś z nich zechciał oświecić go nieco w tym względzie.

Na zakończenie autor chciałby jeszcze powiedzieć, że twierdzenie Toeplitza jest fundamentalnym twierdzeniem macierzowej Teorii Limesowalności, ale to będzie, być może, tematem innego artykułu.