Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań

zadań 23 /WT=2,40/ i 24 /WT=2,19/

z numeru 2/1986

Piotr Bała	- Toruń	47,54pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	32,53pkt
Aleksander Surma	- Myszków	22,37pkt

Witamy pierwszego członka Klubu 44 F, którym został pan Piotr Bała.

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 X 1986

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Zadania z fizyki nr 31, 32

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

31. Obliczyć stosunek E_a/E_b wartości natężenia pola elektrycznego, występującego w bezpośrednim sąsiedztwie powierzchni jednorodnie naładowanej ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ, gdy E_a i E_b odpowiadają nieskończonej powierzchni płaskiej i powierzchni kuli.

32. W badaniach dna oceanicznego wykorzystuje się między innymi prowadzone za pomocą sztucznych satelitów Ziemi pomiary kształtu powierzchni oceanu, która — jak się okazuje — ma lokalne wzniesienia oraz depresje. Jakie informacje dotyczące dna oceanu można uzyskać na podstawie wyników takich pomiarów? Przytoczyć tok rozumowania.

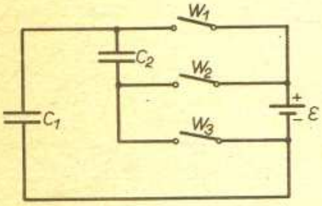
Zadanie **31** nadesłał pan Robert Repucha z Gołdapi.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1986

Przypominamy treść zadań:

27. W chwili początkowej wszystkie włączniki w obwodzie z rysunku 1 są rozwarte, a kondensatory (pojemność C_1 i C_2) nie naładowane. Zwieramy W_1 i W_3, po pewnym czasie rozwieramy i zwieramy W_2. Wyznaczyć wartość i znak końcowego napięcia na C_2. Siła elektromotoryczna ogniwa wynosi $\mathscr{E}$, opór wewnętrzny zaniedbać.

28. Traktując cząsteczkę jodku cezu (CsI) jako sztywny układ dwóch ładunków ($\pm 1{,}6\cdot 10^{-19}$C) o masach $2\cdot 10^{-25}$ kg, oddalonych od siebie o $3\cdot 10^{-10}$ m, obliczyć częstotliwość drgań, jakie cząsteczka będzie wykonywała w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu $3\cdot 10^{6}$ V/m po nagłej zmianie kierunku pola o niewielki kąt.



Rys. 1

27. Schemat układu przy zwartych wyłącznikach W_1 i W_3 przedstawia rysunek 2a. Na obu kondensatorach panuje napięcie $U = \mathscr{E}$, a zgromadzony w nich ładunek wynosi odpowiednio $Q_1 = C_1\mathscr{E}$ oraz $Q_2 = C_2\mathscr{E}$, przy czym okładki oznaczone kropkami są naładowane dodatnio. Sytuację końcową — po rozwarciu W_1 i W_2 oraz zwarciu W_3 — przedstawia rysunek 2b. Oznaczając panujące na kondensatorach napięcia przez U_1, U_2 (dodatnie wartości U_1, U_2 odpowiadają polaryzacji napięcia jak w poprzednim przypadku) możemy napisać

$$U_1 = U_2+\mathscr{E}. \tag{1}$$

Ładunki na obu kondensatorach wynoszą teraz odpowiednio

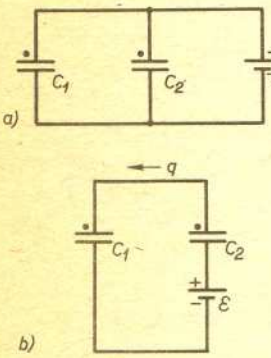
$$Q_1' = C_1U_1 = Q_1+q \quad \text{oraz} \quad Q_2' = C_2U_2 = Q_2-q,$$

gdzie q jest ładunkiem, który przepłynął w obwodzie po zwarciu wyłącznika W_3. Suma tych ładunków jest równa

$$C_1U_1+C_2U_2 = (C_1+C_2)\mathscr{E}. \tag{2}$$

Rozwiązując układ równań (1) i (2) otrzymujemy poszukiwane wyrażenie

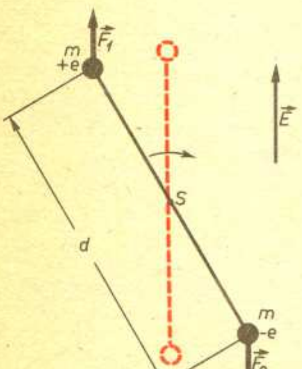
$$U_2 = \frac{C_2}{C_1+C_2}\mathscr{E} \quad \text{(dodatni biegun na okładce oznaczonej kropką).}$$



Rys. 2

28. Przyjmijmy, że dipolowa cząsteczka CsI znajdowała się pierwotnie w położeniu równowagi trwałej, tzn. była skierowana równolegle do wektora natężenia pola elektrycznego E. Nagła zmiana kierunku wektora E odpowiada wychyleniu cząsteczki z położenia równowagi. Działające na ładunki +e, −e siły elektryczne F_1 i F_2 (patrz rysunek 3) powodują obrót cząsteczki dookoła jej środka masy S. W wyniku tego cząsteczka zaczyna drgać wokół swego położenia równowagi (na rysunku zaznaczone linią przerywaną). Sytuacja każdego z drgających ładunków jest analogiczna, jak punktu materialnego w wahadle matematycznym o długości $d/2$ (d — odległość między jonami w cząsteczce) z tą różnicą, że zamiast siły przyciągania ziemskiego mg na każdą z mas m działa siła eE. Wobec tego we wzorze na okres drgań wahadła matematycznego $T = 2\pi\sqrt{\frac{d/2}{g}}$ zastępujemy przyspieszenie ziemskie g wyrażeniem $\frac{eE}{m}$, otrzymując $T = 2\pi\sqrt{\frac{dm}{2eE}}$. Częstotliwość omawianych drgań wynosi zatem $\nu = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{eE}{2dm}}$.

Po podstawieniu danych otrzymujemy $\nu = 2\cdot 10^{10}$ Hz.



Rys. 3

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 125 /WT=2,94/ i 126 /WT=2,32/ z numeru 2/1986

Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	48,99pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	44,46pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	42,56pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	42,54pkt
Marek Prauza	- Poraj	41,30pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	41,03pkt

Pan Jędrzejewicz to numer 42 w Klubie 44. Pan Sowizdrzał - już po raz trzeci /i jest szóstym Weteranem Klubu 44/.

Zadania z matematyki nr 133, 134 *Redaguje dr Marcin E. KUCZMA*

133. Dać przykład wielościanu wypukłego o następujących własnościach:
a) wszystkie krawędzie mają równe długości oraz są styczne do pewnej sfery;
b) nie istnieje sfera opisana na tym wielościanie.
Rozwiązanie będzie uważane za tym lepsze, im mniej krawędzi będzie miał wielościan.

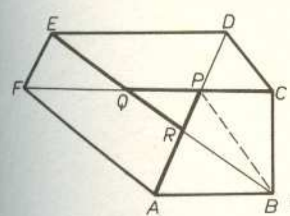
134. Rozwiązać równanie
$$x = 5+(5+(5+ \dots +(5+(5+x^{-1})^{-1})^{-1} \dots)^{-1})^{-1};$$
po prawej stronie występuje n piątek i n znaków odwrotności oraz $n-1$ par nawiasów; n jest ustaloną liczbą naturalną.
Zadanie **134** przysłał pan Stanisław Wróbel z miejscowości Mroczeń w woj. kaliskim.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1986

Przypominamy treść zadań:

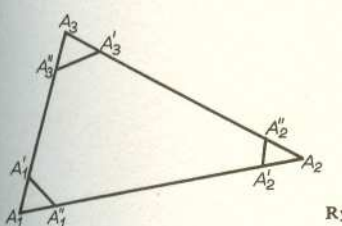
129. Czy sześciokąt wypukły o polu S musi mieć trzy kolejne wierzchołki takie, że pole T trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki spełnia nierówność: a) $T \leqslant S/6$, b) $T \geqslant S/6$?

130. Znaleźć kres dolny liczb postaci $m^{-1/n}+n^{-1/m}$ $(m, n \in \mathbf{N})$.



Rys. 1

129. Odpowiedź: a) tak, b) nie. Uzasadnienie:
a) Przy oznaczeniach z rysunku 1 któryś z czworokątów $ABCP$, $CDEQ$, $EFAR$ ma pole $\leqslant S/3$. Przypuśćmy, że jest to czworokąt $ABCP$. Przekątna $\overline{BP}$ dzieli go na dwa trójkąty i któryś z nich ma pole $\leqslant S/6$. Niech to będzie trójkąt BCP. Jego pole jest niemniejsze od pola któregoś z trójkątów ABC, BCD. Stąd teza.
b) Weźmy dowolny trójkąt $A_1 A_2 A_3$ o polu S. Na bokach wychodzących z każdego wierzchołka A_i obierzmy w niewielkiej od niego odległości punkty A_i', A_i'' (rysunek 2). Gdy punkty A_i', A_i'' zbliżają się do A_i $(i = 1, 2, 3)$, pole sześciokąta $A_1'A_1''A_2'A_2''A_3'A_3''$ dąży do S, podczas gdy pole każdego z trójkątów wyznaczonych przez trzy kolejne wierzchołki tego sześciokąta dąży do zera.



Rys. 2

130. $\sqrt[n]{m} = \sqrt[n]{m \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n-1}} \leqslant \frac{1}{n}(m+n-1)$ i podobnie $\sqrt[m]{n} \leqslant \frac{1}{m}(n+m-1)$.

Zatem rozważane wyrażenie jest $\geqslant \frac{n}{m+n-1} + \frac{m}{m+n-1} > 1$. Przy tym liczba 1 jest kresem dolnym: gdy $m = 1$ i $n \to \infty$, badane wyrażenie dąży do 1.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 442. Rzucamy monetą, dopóki nie wypadnie orzeł. Ile średnio prób trzeba wykonać, jeśli prawdopodobieństwo otrzymania orła w pojedynczym rzucie wynosi p? Zakładamy, że wartość średnia ilości prób istnieje.
Rozwiązanie na str. 14

M 443. Udowodnić, że funkcja $f(x) = \sin x$ nie jest wielomianem.
Rozwiązanie na str. 2

M 444. Znaleźć pole figury ograniczonej wykresem funkcji $\sin^2 x$ i prostymi $x = \frac{\pi}{2}$, oraz $y = 0$.
Rozwiązanie na str. 1

Redagują mgr Tomasz TRATKIEWICZ i mgr Włodzimierz ZIELICZ

F 202. Gaz doskonały o temperaturze T_1 zamknięty jest w elastycznej, nie przewodzącej ciepła powłoce pod ciśnieniem P_1. Wyznaczyć temperaturę gazu T_2 po gwałtownej zmianie ciśnienia do wartości P_2. Jaka byłaby zmiana temperatury, gdyby proces zachodził odwracalnie?
Rozwiązanie na str. 2

F 203. Izolowany cieplnie pojemnik z gazem doskonałym zawieszono na nici. Działanie siły ciężkości powoduje, że gęstość gazu w dolnej części naczynia jest większa niż w górnej. Nić przecięto. Czy temperatura gazu po dojściu do stanu równowagi termodynamicznej w czasie swobodnego spadku będzie inna niż przed przecięciem nici?
Rozwiązanie na str. 7