Grupy krystalograficzne

Zdarza się, że dla grupy G złożonej z izometrii przestrzeni S (np. jedno-, dwu- czy trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej) istnieje figura geometryczna F o niepustym wnętrzu (zwana obszarem podstawowym) spełniająca dwa warunki

1° obrazy obszaru podstawowego we wszystkich przekształceniach z grupy pokrywają całą przestrzeń,

2° obrazy F w różnych przekształceniach mają wspólny co najwyżej brzeg.

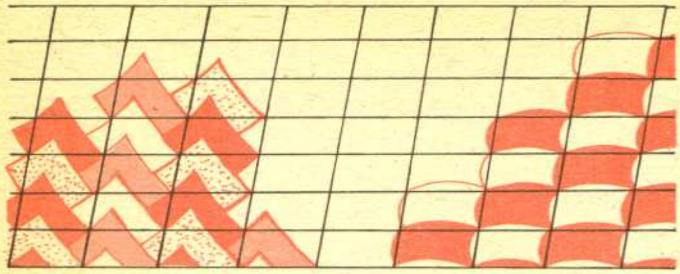
Wówczas mówimy, że grupa G jest grupą krystalograficzną.

Wymiarem grupy krystalograficznej nazywa się maksymalną liczbę niezależnych przesunięć należących do grupy. Przesunięcia o wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ nazywamy niezależnymi, jeśli spełniony jest warunek

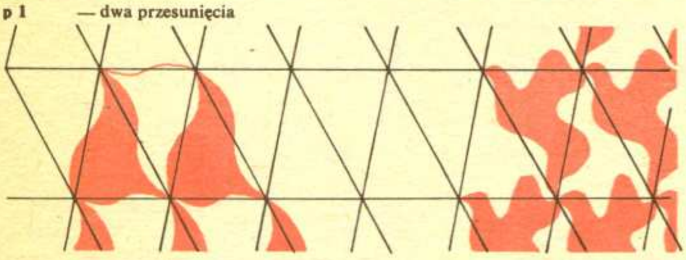
dla dowolnych liczb całkowitych $k_1, k_2, \ldots, k_n$

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2 + \ldots + k_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0} \rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

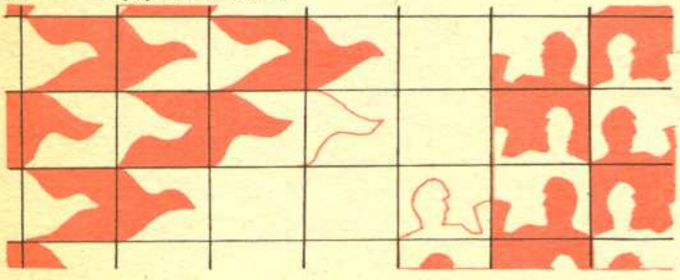
Wymiar grupy krystalograficznej nie musi być równy wymiarowi przestrzeni, w której ta grupa działa. Na przykład na płaszczyźnie euklidesowej jest dokładnie 7 (nieizomorficznych, czyli różnie zbudowanych) jednowymiarowych grup krystalograficznych — przedstawione są one w *Małej Delcie* (str. 8, 9) jako różne sposoby budowania szlaczków literowych (Czytelnik zechce dla każdej z nich znaleźć odpowiedni obszar podstawowy — należy pamiętać, że obszar taki musi być nieograniczony). To, że na płaszczyźnie euklidesowej jest dokładnie 17 dwuwymiarowych grup krystalograficznych, udowodnił dopiero w 1891 roku E. S. Fiodorow. Grupa krystalograficzna nie wyznacza



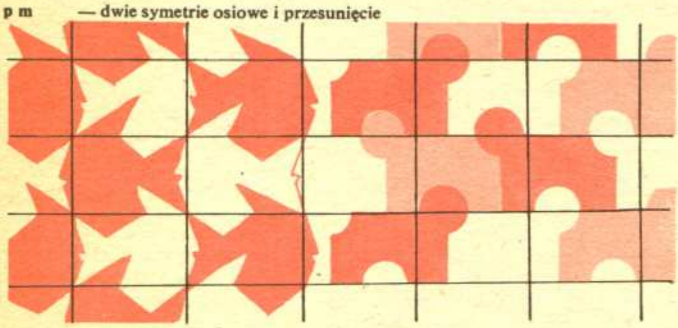
p 1 — dwa przesunięcia



p 2 — trzy symetrie środkowe

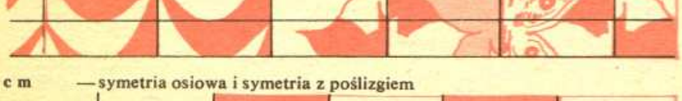


p m — dwie symetrie osiowe i przesunięcie



p g — dwie symetrie z poślizgiem o osiach równoległych

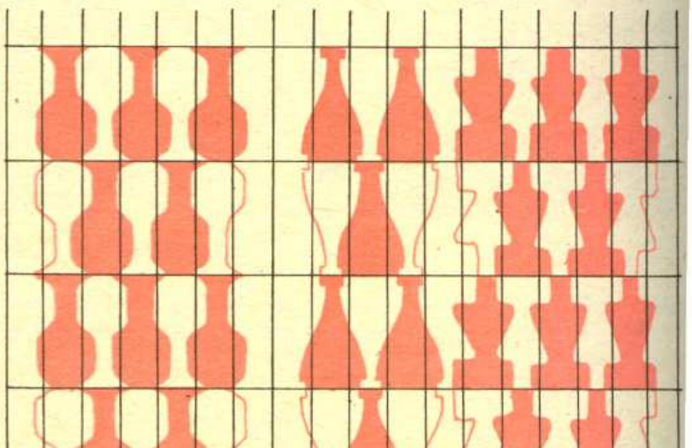
c m — symetria osiowa i symetria z poślizgiem



p m m — symetrie względem boków prostokąta

p m g — symetria osiowa i dwie symetrie środkowe

p g g — dwie symetrie z poślizgiem o osiach prostopadłych

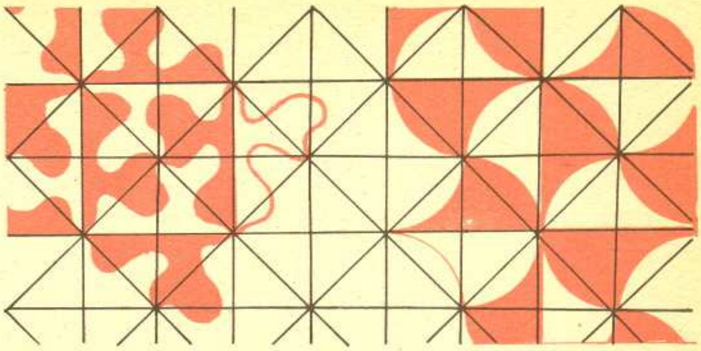


c m m — dwie symetrie osiowe i jedna symetria środkowa swojego obszaru podstawowego, można go więc wybrać kierując się np. względami estetycznymi i otrzymać z jego obrazów piękną mozaikę. Arabeski Alhambry zawierają przykłady 15 dwuwymiarowych grup krystalograficznych. Wiele przykładów mozaik krystalograficznych można znaleźć w grafikach M. C. Eschera.

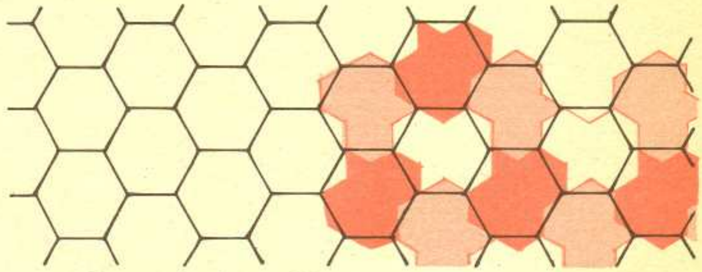
Każda grupa krystalograficzna ma skończony układ generatorów. Generatorami grupy nazywa się takie jej elementy, że każde przekształcenie w grupie jest złożeniem skończonej liczby tych elementów. Np. przesunięcia o wektor $\boldsymbol{w}$ i $\boldsymbol{v}$ są generatorami grupy złożonej ze wszystkich przesunięć o wektory $k\,\boldsymbol{w}+l\,\boldsymbol{v}$, dla całkowitych k i l. Obok przedstawiamy wszystkie dwuwymiarowe grupy płaszczyzny euklidesowej podając ich generatory (Czytelnik zechce sprawdzić, czy podaliśmy je dobrze).

Zdziwienie mogą wzbudzić symbole tych grup. Wzięły się one jednak nie z matematyki, lecz z mineralogii i fizyki. Do niedawna panowało bowiem przekonanie, że każdy rzeczywisty kryształ jest zbudowany z komórek będących obszarami podstawowymi jakiejś trójwymiarowej grupy krystalograficznej przestrzeni euklidesowej. Stąd nazwa tych grup i zainteresowanie nimi przyrodników (nawet tymi dwuwymiarowymi). Trójwymiarowych grup krystalograficznych przestrzeni euklidesowej jest 230 (ustalili to niezależnie Fiodorow — 1890, Schoenflies — 1891 i Barlow — 1894). Nie każdej z nich (tylko trzydziestu dwóm) odpowiada jakiś kryształ, a co ciekawsze — są kryształy nie odpowiadające żadnej grupie krystalograficznej, o czym pisze Andrzej Hennel na stronie pierwszej.

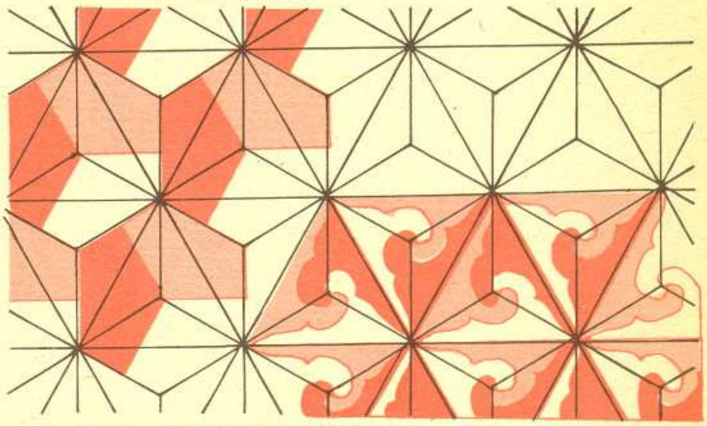
M. K.



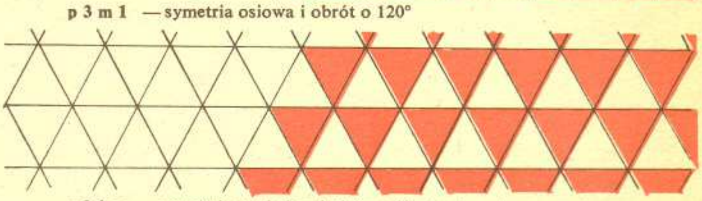
p 4 g — symetria osiowa i obrót o 90°



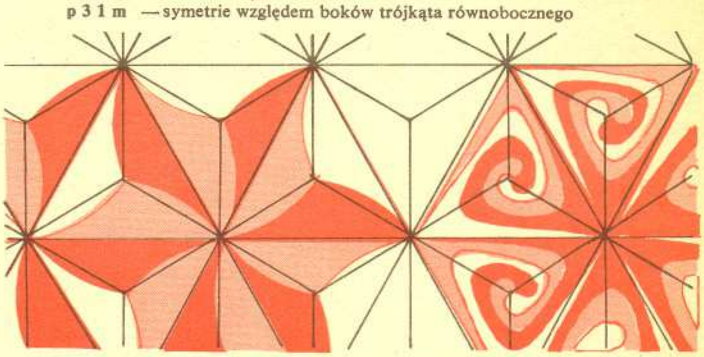
p 3 — dwa obroty o 120°



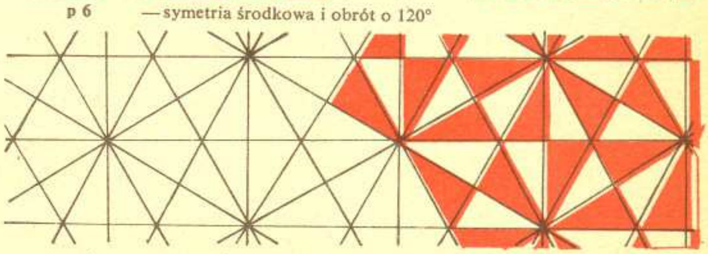
p 3 m 1 — symetria osiowa i obrót o 120°



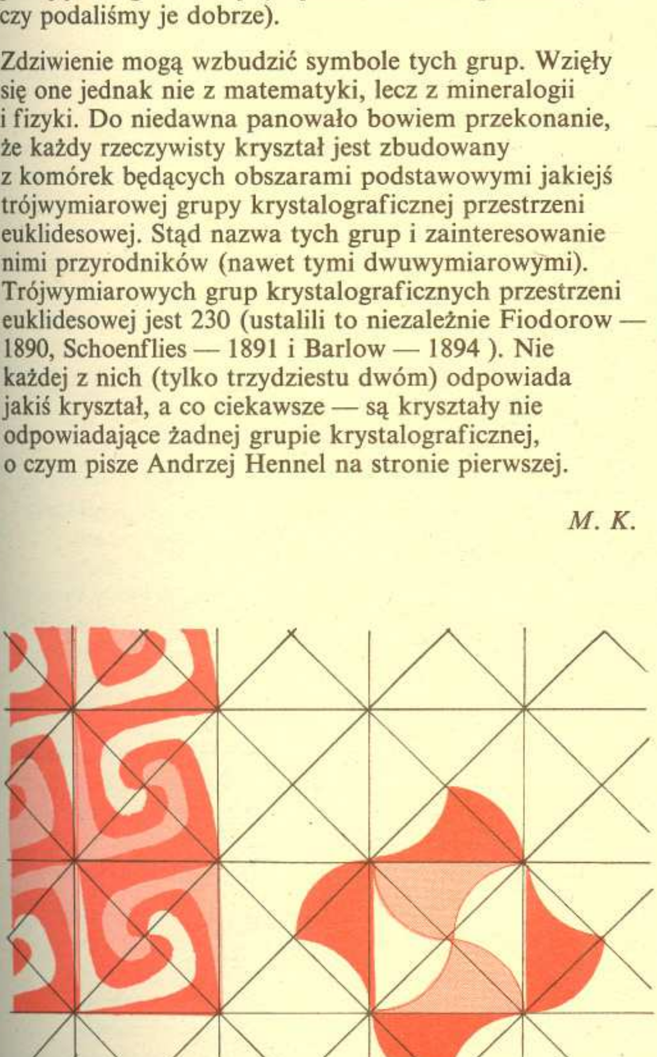
p 3 1 m — symetrie względem boków trójkąta równobocznego



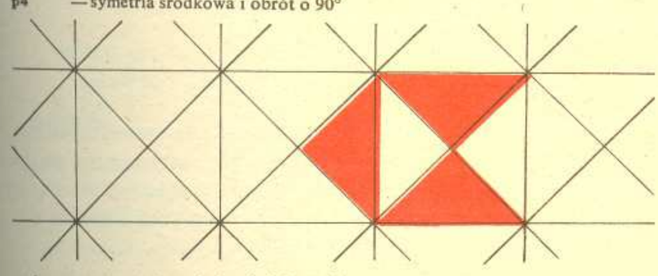
p 6 — symetria środkowa i obrót o 120°



p 6 m — symetrie względem boków trójkąta o kątach 30°, 60°, 90°



p4 — symetria środkowa i obrót o 90°



p 4 m — symetrie względem boków trójkąta równoramiennego prostokątnego