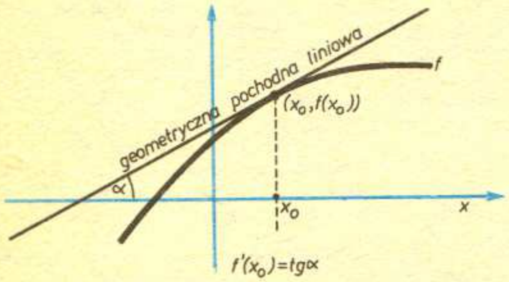
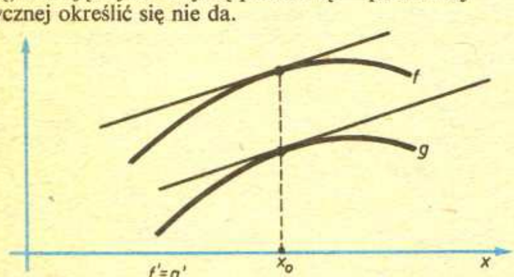
Rozmaite geometryczne pochodne

Wynikiem różniczkowania funkcji f w punkcie x_0 jest liczba oznaczana przez $f'(x_0)$. Np. w drugiej klasie liceum podaje się przepis, jak obliczyć tę liczbę. Geometryczne spojrzenie na ten przepis pozwala liczbę $f'(x_0)$ przedstawić jako rezultat następujących działań: prowadzimy styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i *następnie* znajdujemy tangens kąta, który ta styczna tworzy z osią „iksów". Opuszczając w tym przepisie część znajdującą się po słowie *następnie* otrzymujemy *geometryczną pochodną* funkcji f w punkcie x_0 — geometryczna pochodna jest więc prostą. Pojęcie geometrycznej pochodnej jest bogatsze od pojęcia „zwykłej" pochodnej z dwóch powodów:

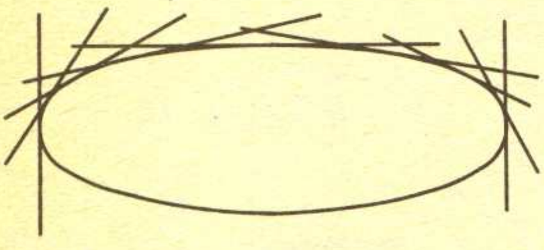


1° Mając geometryczną pochodną możemy znaleźć „zwykłą" pochodną, a znając tylko zwykłą pochodną — pochodnej geometrycznej określić się nie da.

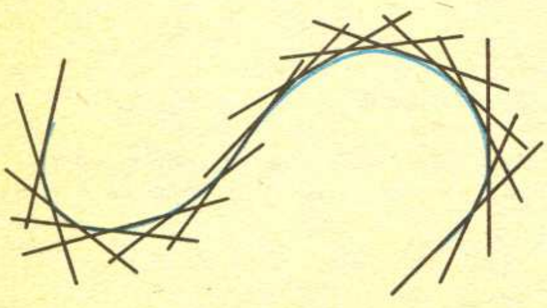


a geometryczne pochodne różne

2° Geometryczna pochodna nie zależy od układu współrzędnych i można ją znaleźć również dla krzywych nie będących wykresami funkcji.

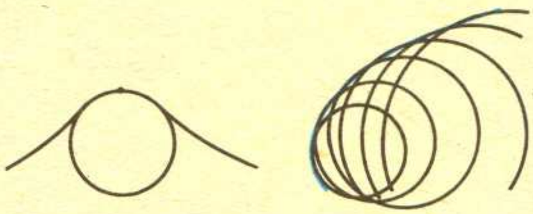


Odpowiednikiem całkowania (czyli operacji prowadzącej od pochodnej jakiejś funkcji do tejże funkcji) jest rysowanie obwiedni (czyli krzywej stycznej do wszystkich prostych — lub ogólniej krzywych — danej rodziny). Bierze się to z wariacyjnego określenia stycznej — jest to prosta najlepiej (spośród wszystkich prostych) przybliżająca krzywą w otoczeniu danego punktu.

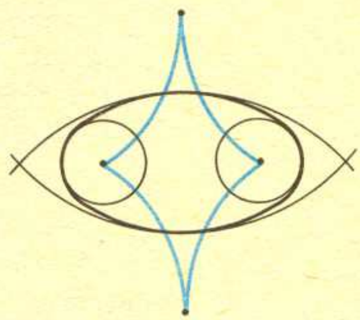


W takim właśnie określeniu geometrycznej pochodnej kryje się możliwość uogólnienia tego pojęcia. Żeby dalej nie było nieporozumień, nazwijmy *liniową* zdefiniowaną wyżej geometryczną pochodną.

Pozostając wśród krzywych płaskich nazwijmy geometryczną pochodną *okręgową* danej krzywej w danym punkcie okrąg najlepiej (spośród wszystkich okręgów) przybliżający krzywą w otoczeniu tego punktu. Odpowiednim całkowaniem będzie i tutaj rysowanie obwiedni. Zwolennicy metod rachunkowych i z tego pojęcia zrobili „coś rachunkowego" — odwrotność promienia geometrycznej pochodnej okręgowej danej krzywej w danym punkcie nazywa się *krzywizną* krzywej w tym punkcie i jest to oczywiście liczba. Znane są też metody uzyskania tej liczby bez posługiwania się metodami geometrii.



Z geometrycznej pochodnej okręgowej można „wyciągnąć" nie tylko liczby — mogą to być też punkty, np. środki uzyskanych okręgów. Tak się robi, a utworzoną z nich krzywą nazywa się *ewolutą* krzywej wyjściowej.



ewoluta elipsy

Oczywiście pojęcia tak liniowej, jak i okręgowej geometrycznej pochodnej mogą być rozciągnięte również na krzywe przestrzenne. Wtedy bardzo przydatne okazuje się jeszcze pojęcie geometrycznej pochodnej *śrubowej*. Konsekwentnie — jest to linia śrubowa najlepiej przybliżająca krzywą w otoczeniu danego punktu. I znów zwolennicy rachunków uzyskają z niej liczby — dla śruby o promieniu r i skoku h są to

$$\frac{4\pi^2 r}{4\pi^2 r^2 + h^2} \quad \text{i} \quad \frac{2\pi h}{4\pi^2 r^2 + h^2}.$$

Pierwsza z tych liczb to krzywizna — ta sama, którą uzyskalibyśmy stosując geometryczną pochodną okręgową. Drugą liczbę nazywa się *skręceniem* krzywej. Sto pięćdziesiąt lat temu Frenet udowodnił, że krzywizna (jeśli jest wszędzie różna od zera) i skręcenie wyznaczają krzywą z dokładnością do położenia. Geometryczna pochodna wyznacza ją oczywiście jednoznacznie.

W tym miejscu może powstać przekonanie, że można by określić mnóstwo jeszcze innych geometrycznych pochodnych. Tak też jest rzeczywiście: można poszukiwać najlepszych przybliżeń danej krzywej wśród krzywych dowolnie obranej przez siebie rodziny. Żeby jednak takie nowe geometryczne różniczkowanie było uznane za sensowny wynik (a nie za zbędne mnożenie pojęć), należałoby wykazać, że za jego pomocą można uzyskać jakieś rezultaty, jakieś twierdzenie łatwiej niż innymi metodami. Albo jeszcze lepiej — uzyskać nie znane dotąd fakty. Bo narzędzie musi być nie tylko zmyślnie skonstruowane, ale przede wszystkim przydatne.

dr hab. Marek KORDOS