O pewnym algorytmie i związanym z nim zadaniu geometrycznym

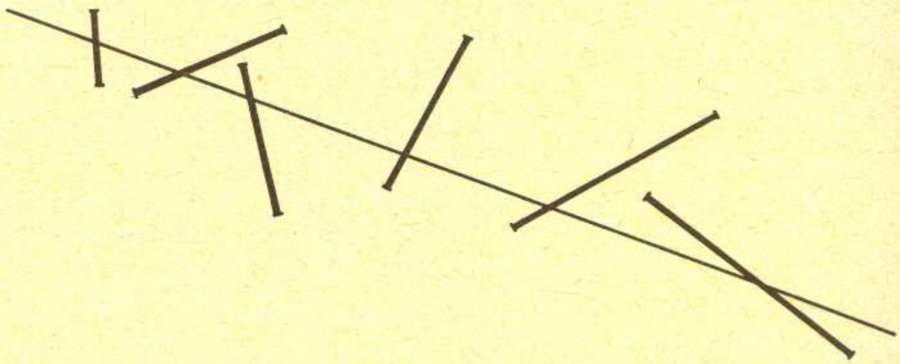
Dr Jerzy JAROMCZYK, Grzegorz ŚWIĄTEK

Wziął pierzastą strzałę leżącą na stole
Kiedy inne w zawartym leżały kołczanie,
Przeznaczone Achiwom wnet na skosztowanie.
Tę wziąwszy, karbem przytknął do cięciwy szczelnie,
I jak siedział na stołku wymierzył łuk celnie,
Grot puścił i ten topory wszystkie trafił rzędem
Przeszywszy pierwsze ucho, wyleciał tym pędem
Przez ostatnie (...)

Homer, *Odyseja*, *Pieśń* 21
tłum. L. Siemieński

Tak opisuje Homer rozwiązanie przez Odysa zadania Penelopy przestrzelenia jednym strzałem z łuku otworów w dwunastu ustawionych rzędem obuchach toporów. W artykule tym zajmiemy się rozwiązaniem podobnego zadania, aczkolwiek w zgoła innym celu niż zrobił to Odys.

Zadanie jest następujące:
Na płaszczyźnie dany jest układ n odcinków (otwartych). Znaleźć (o ile istnieje) prostą, która ma niepuste przecięcie z każdym odcinkiem układu.



Prostą taką będziemy nazywać, dla zachowania analogii z zadaniem Penelopy, prostą przeszywającą dany układ odcinków. Interesować nas będzie rozwiązanie w postaci algorytmu (sposobu postępowania) pozwalającego na znalezienie, dla danego układu odcinków, prostej przeszywającej. W tej sytuacji zadanie wymaga sprecyzowania, co rozumiemy przez „znalezienie prostej".

Przyjmujemy, że układ odcinków jest określony przez n czwórek liczb $(x_0^1, y_0^1, x_1^1, y_1^1)$, $(x_0^2, y_0^2, x_1^2, y_1^2)$, ..., $(x_0^n, y_0^n, x_1^n, y_1^n)$, gdzie punkty o współrzędnych (x_0^i, y_0^i) oraz (x_1^i, y_1^i) są końcami i-tego odcinka układu. Zakładamy ponadto, że liczby $x_0^1, x_1^1, x_0^2, x_1^2, \ldots, x_0^n, x_1^n$ są parami różne. Dla każdego układu odcinków na płaszczyźnie odpowiedni wybór układu współrzędnych pozwala spełnić ten warunek, z drugiej zaś strony w zastosowaniach praktycznych równość dwóch nie związanych ze sobą danych nie powinna w ogóle się zdarzyć.

Zadaniem jest znalezienie równania prostej mającej niepuste przecięcie z każdym z danych odcinków.

Proponujemy Czytelnikowi, aby przerwał na moment lekturę tego artykułu i spróbował samodzielnie znaleźć rozwiązanie.

Wydaje się, że rozwiązanie naszego zadania nie jest łatwe. Znalezienie na przykład prostej przeszywającej pewien podzbiór $n-1$ odcinków z danego układu wcale nie musi nas przybliżać do rozwiązania. Wiadomo w szczególności, że dla każdego $n \geq 3$ istnieje układ n parami rozłącznych odcinków o jednakowej długości taki, że każdy podzbiór $(n-1)$ odcinków ma prostą przeszywającą, natomiast cały układ takiej prostej nie ma.

Rozwiązanie zadania F 200. Cukier rozpuszczając się pochłania ciepło i dlatego temperatura herbaty podczas tego procesu maleje. Herbata przekazuje w jednostce czasu do otoczenia tym więcej energii, im większa jest różnica temperatur między nią i otoczeniem, a więc herbata z rozpuszczonym cukrem przekaże w tym samym czasie do otoczenia mniejszą ilość ciepła niż mająca wyższą temperaturę herbata bez cukru. Klient, który pierwszy posłodził, będzie więc pił herbatę cieplejszą.

Rozwiązanie, które pragniemy przedstawić, opiera się na pewnej transformacji geometrycznej. Rozpocznijmy od jej określenia i kilku podstawowych własności.

Rozważmy dwie płaszczyzny P i P'. Wybierzmy na każdej z nich układ współrzędnych prostokątnych. Współrzędne na płaszczyźnie P oznaczać będziemy jako x i y — na P' odpowiednio jako x' i y'. Transformacja, którą nazywać będziemy dualną, przyporządkowuje prostej o równaniu $y = ax+b$, leżącej w płaszczyźnie P, punkt o współrzędnych (a, b) na płaszczyźnie P'. Przekształcenie to odwzorowuje w sposób wzajemnie jednoznaczny zbiór prostych niepionowych płaszczyzny P na płaszczyznę P'. W sposób naturalny nasuwa się pytanie, co jest przeciwobrazem prostej przy tej transformacji. Przyjmijmy, że równanie tej prostej, leżącej w płaszczyźnie P', jest postaci

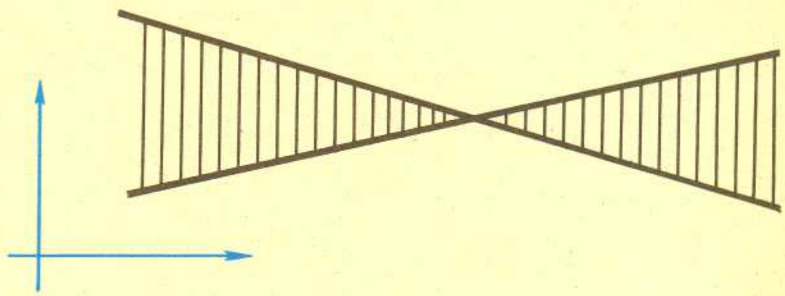
$$y' = a'x'+b'.$$

Wówczas proste należące do przeciwobrazu mają równania $y = xx'+a'x'+b'$, gdzie x' jest parametrem przebiegającym zbiór liczb rzeczywistych. Podstawiając $x = -a'$ otrzymujemy $y = -b'$. Zatem punkt $(-a', b')$ należy do każdej z tych prostych, a ich współczynniki kierunkowe przebiegają wraz z parametrem x' liczby rzeczywiste.

Dokonaliśmy więc następującego spostrzeżenia:

Przeciwobrazem prostej o równaniu $y' = a'x'+b'$ z płaszczyzny P' jest zbiór prostych niepionowych płaszczyzny P przechodzących przez punkt $(-a', b')$.

Przypuśćmy teraz, że w płaszczyźnie P dany jest domknięty odcinek I o końcach (x_0, y_0), (x_1, y_1), przy czym $x_0 \neq x_1$. Znajdźmy obraz przy transformacji dualnej zbioru prostych niepionowych przecinających I. Zgodnie z powyższym spostrzeżeniem jest on sumą prostych, z których każda jest obrazem zbioru prostych przechodzących przez pewien punkt odcinka. Równania tych prostych są postaci $y' = t(-x_0x'+y_0)+(1-t)(-x_1x'+y_1)$, gdzie parametr t przyjmuje wartości z przedziału domkniętego $[0,1]$. Zauważmy, że skoro $x_0 \neq x_1$, to proste $y' = -x_0x'+y_0$ oraz $y' = -x_1x'+y_1$ przecinają się. Obraz zbioru prostych niepionowych przecinających I jest domknięciem pary kątów wierzchołkowych i nie zawiera prostej pionowej.



Zbiór o powyższych własnościach będziemy dalej nazywać obszarem wierzchołkowym. Dowiedliśmy, że zbiór prostych przecinających domknięty odcinek niepionowy przechodzi przy transformacji dualnej na pewien obszar wierzchołkowy. Odwracając to rozumowanie Czytelnik udowodni bez trudu, że każdemu obszarowi wierzchołkowemu odpowiada w ten sposób pewien niepionowy odcinek.

Wyposażeni w transformację dualną możemy przystąpić do rozwiązywania naszego zadania. W myśl przyjętego na wstępie założenia żaden odcinek układu nie jest pionowy. Przekształćmy zatem każdy odcinek w odpowiadający mu obszar wierzchołkowy. Przypomnijmy, że punkty leżące w obszarze wierzchołkowym odpowiadają prostym przecinającym odcinek. Tak więc każdy punkt leżący w części wspólnej obszarów wierzchołkowych odpowiada prostej przeszywającej wszystkie odcinki.

Opisane powyżej rozumowanie pozwala łatwo sformułować algorytm znajdowania prostej przeszywającej. Algorytm jest następujący:

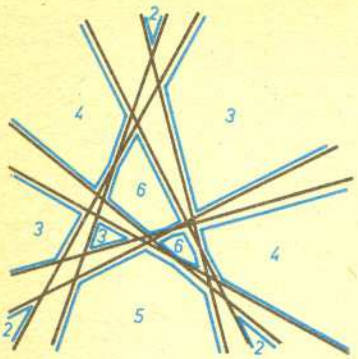
1. Przekształcić każdy odcinek w odpowiadający mu obszar wierzchołkowy.
2. Znaleźć podzbiór płaszczyzny będący częścią wspólną wszystkich obszarów wierzchołkowych.
3. Wybrać punkt należący do znalezionego przecięcia i wyznaczyć prostą będącą jego przeciwobrazem. Prosta ta jest szukaną prostą przeszywającą.

W przypadku, gdy część wspólna obszarów wierzchołkowych jest pusta, układ nie ma niepionowej prostej przeszywającej; jednak nie ma on wtedy w ogóle prostej przeszywającej. Przypuśćmy bowiem, że układ ma pionową prostą przeszywającą. W myśl założenia przyjętego na początku artykułu co najwyżej jeden odcinek przecina ona w końcu, pozostałe zaś w punktach wewnętrznych. Istnieje więc również niepionowa prosta przeszywająca powstała z poprzedniej przez niewielki obrót.

Rozwiązanie zadania M 440. Liczba $2^{4n}-1 = 16^n-1$ dzieli się przez 5, zatem $2^{4n}-1 = 5k$ dla pewnego nieparzystego k. Stąd

$6\cdot 2^{2^{4n}}+1 = 6\cdot 2^{5k+1}+1 = 12\cdot 2^{5k}+(12-11) = 12(2^{5k}+1)-11 = 12(2^5+1)(2^{5(k-1)}-2^{5(k-2)}+\ldots-2^5+1)-11 = 12\cdot 33(2^{5(k-1)}-2^{5(k-2)}+\ldots-2^5+1)-11.$

Tak więc liczba $6\cdot 2^{2^{4n}}+1$ dzieli się przez 11.

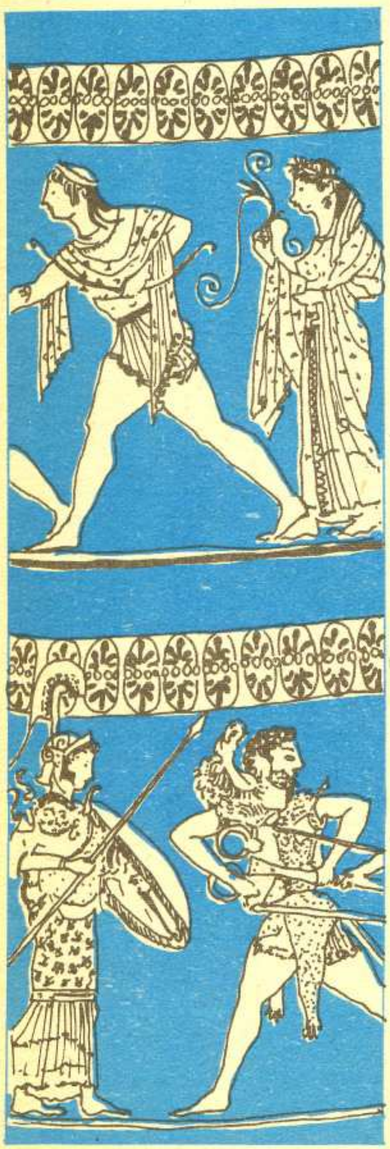


Rysunek przedstawia cztery pary kątów wierzchołkowych, których część wspólna ma łącznie czterdzieści boków. Jej składowe wielokąty zostały na rysunku obwiedzione kolorem i w każdym wpisano liczbę jego boków. Miary wszystkich kątów są bliskie π — przykłady oparte na podobnej zasadzie można konstruować dla dowolnie wielu par kątów, otrzymując dla n par kątów właśnie $2n(n+1)$ boków, co, jak nietrudno z kolei pokazać, jest już górną granicą.

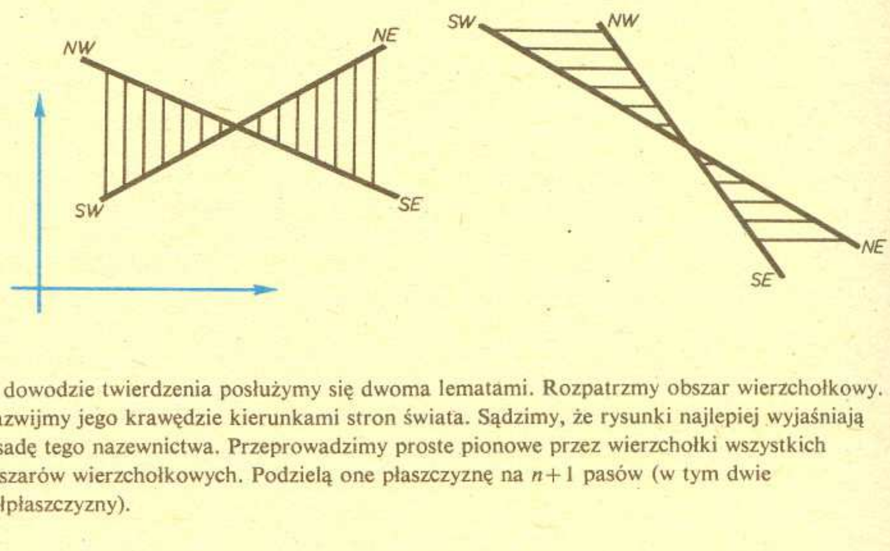
W przypadku natomiast, gdy część wspólna obszarów wierzchołkowych jest niepusta, pionowe proste przeszywające musimy wyznaczyć oddzielnie. Czytelnikowi pozostawimy dowód faktu, że proste te wypełniają pas pionowy ograniczony prostymi o równaniach $x = \max\ \{x_0^i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ oraz $x = \min\ \{x_1^i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$, jak również znalezienie prostego i efektywnego algorytmu wyznaczania minimum i maksimum zbioru liczb.

Zastanówmy się nad złożonością przedstawionego algorytmu. Zagadnienie złożoności obliczeniowej pewnych innych algorytmów było już w *Delcie* przedstawione (patrz A. Kreczmar *Delta* 4/1986, T. Przytycka *Delta* 9/1985). Zwróćmy uwagę, że w naszym algorytmie główna praca (po wykonaniu transformacji) poświęcona jest znalezieniu części wspólnej obszarów wierzchołkowych. Można pokazać, czym tutaj nie będziemy się zajmować, że zadanie takie wymaga rzędu $M \cdot n \cdot \log n$ elementarnych operacji, takich jak znajdowanie punktów przecięcia prostych itp. (n — to liczba odcinków, M — liczba niezależna od n). W przedstawionym algorytmie znacznie ciekawszym zagadnieniem jest jego złożoność pamięciowa. Intuicyjnie rozumieć przez to można ilość informacji (takich jak współrzędne punktów, współczynniki prostych itp.), które musimy mieć w trakcie wykonywania algorytmu. W przypadku realizacji algorytmu przez komputer informacje przechowujemy w pamięci komputera — stąd termin złożoność pamięciowa. Jasne jest, że oszacowania wymaga ilość informacji związanych z opisem wielokątów będących częścią wspólną obszarów wierzchołkowych. Opisem takim jest na przykład ciąg boków poszczególnych wielokątów. Pokażemy, że liczba ta jest proporcjonalna do liczby odcinków. Dokładniej — udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie. Łączna liczba boków wielokątów będących częścią wspólną n obszarów wierzchołkowych jest nie większa niż $8n$.



Stwierdzenie to jest dość zaskakujące; wydawać się może, że liczba ta jest równa $2n(n+1)$, co dla dużych n ogromnie przewyższa $8n$. Istotnie, gdyby nie założenie, że żaden z obszarów wierzchołkowych nie zawiera prostej pionowej, można by skonstruować przykład z $2n(n+1)$ bokami. To niepozornie wyglądające założenie całkowicie zmienia sytuację.

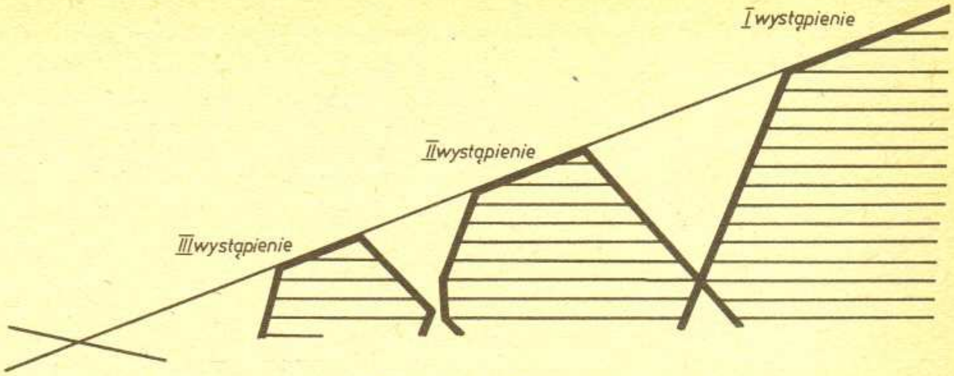


W dowodzie twierdzenia posłużymy się dwoma lematami. Rozpatrzmy obszar wierzchołkowy. Nazwijmy jego krawędzie kierunkami stron świata. Sądzimy, że rysunki najlepiej wyjaśniają zasadę tego nazewnictwa. Przeprowadzimy proste pionowe przez wierzchołki wszystkich obszarów wierzchołkowych. Podzielą one płaszczyznę na $n+1$ pasów (w tym dwie półpłaszczyzny).

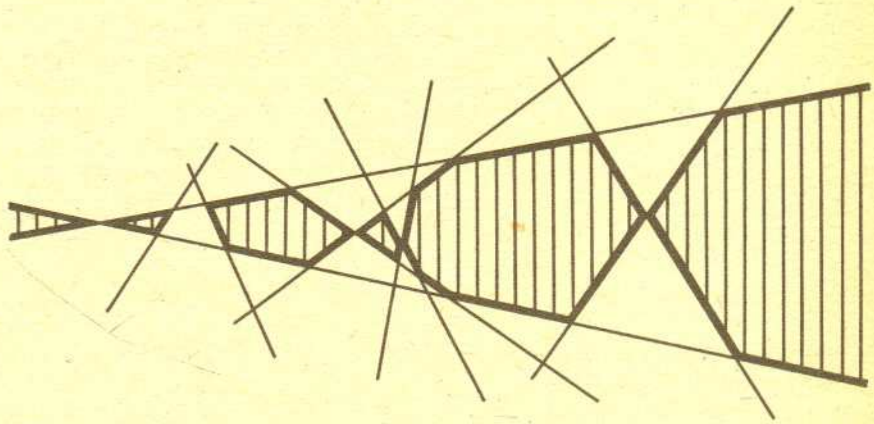
Lemat 1. Przecięcie każdego z pasów z obszarami wierzchołkowymi jest wielokątem wypukłym, którego bokami są krawędzie obszarów wierzchołkowych. (Przez wielokąt rozumiemy figurę o brzegu złożonym z odcinków lub półprostych.)

Dowód: Rozważane przecięcie jest częścią wspólną pewnych półpłaszczyzn, zatem jest wielokątem wypukłym. Łatwo zauważyć, że proste pionowe ograniczające pas nie mogą być bokami wielokąta — każda z nich, z wyjątkiem jednego punktu, leży na zewnątrz obszaru wierzchołkowego, którego wierzchołek zawiera.

Z lematu wynika, iż przecięcie n obszarów wierzchołkowych jest sumą co najwyżej $n+1$ wielokątów. Nazwijmy je składowymi tego przecięcia. Rozpatrzmy krawędź określonego typu (np. *NE*) jednego z obszarów wierzchołkowych. Występuje ona jako bok pewnych składowych przecięcia. Numerujemy te wystąpienia poczynając od składowych najdalej położonych względem wierzchołka obszaru.



Lemat 2. W każdym wielokącie (składowej przecięcia) wszystkie krawędzie danego kierunku (*NE*, *NW*, *SW* lub *SE*), z wyjątkiem co najwyżej jednej, występują pierwszy raz.



Dowód: Zauważmy, że nie po raz pierwszy wystąpić może tylko krawędź o najmniejszym nachyleniu spośród krawędzi danego kierunku. W wielokącie jest co najwyżej jedna taka krawędź każdego kierunku. (Czy nachylenie krawędzi *NE* drugiego z obszarów przedstawionych na rysunku 3 jest duże, czy małe?)

Teraz możemy wyznaczyć łączną liczbę boków wielokątów składowych. Liczba pierwszych wystąpień krawędzi obszarów wierzchołkowych nie przekroczy liczby wszystkich krawędzi, tj. $4n$. W każdej z $n-1$ składowych ograniczonych mogą pojawić się co najwyżej cztery boki pochodzące od krawędzi występujących nie pierwszy raz. Daje to dodatkowo $(4n-4)$ boki składowych ograniczonych. W składowych nieograniczonych pojawić się mogą co najwyżej po dwa takie boki, bowiem każda z takich składowych ma boki pochodzące od krawędzi w dwóch kierunkach (*SW* i *NW* lub *SE* i *NE*). W sumie otrzymujemy oszacowanie $8n$ na łączną liczbę boków wielokątów składowych, co kończy dowód twierdzenia.

Okazuje się, że przedstawione oszacowanie nie jest najlepsze. Można je poprawić do $\lfloor 7{,}5\,n \rfloor - 4$ ($\lfloor r \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż r) i to oszacowanie jest już niemal optymalne. Istnieją przykłady obszarów wierzchołkowych dających w przecięciu $\lfloor 7{,}5\,n \rfloor - 6$ boków. Jednak zarówno dowód tego oszacowania, jak i konstrukcja przykładu nie są już łatwe.

Zastanówmy się na koniec nad złożonością wykonania transformacji dualnej w przypadku, gdy algorytm znajdowania prostej przeszywającej jest realizowany przez komputer. Chwila namysłu przekonuje, że złożoność ta jest... zerowa. Po prostu transformacja dualna, która tak bardzo ułatwiła nam pracę, nie jest dla komputera żadnym przekształceniem. Proste reprezentowane przez parę liczb przechodzą w transformacji dualnej na te same pary. Odcinek jest parą par współrzędnych swoich końców, a obszar wierzchołkowy jest parą tych samych par liczb oznaczających tym razem jego krawędzie. Cała transformacja jest więc tylko zmianą interpretacji, która pozwoliła w naszym przypadku zastąpić mało uchwytne zbiory prostych przecinających odcinki znacznie łatwiej wyobrażalnymi obszarami wierzchołkowymi. W geometrii analitycznej identyfikujemy punkt z jego współrzędnymi. Nie warto jednak brać tego utożsamienia zbyt kategorycznie, gdyż, jak to wskazuje powyższy przykład, może to ograniczać naszą intuicję.

Przedstawiony w tym artykule algorytm należy do geometrii obliczeniowej, będącej częścią działu projektowania i analizy algorytmów. Projektowane w obrębie geometrii obliczeniowej algorytmy znajdują zastosowanie między innymi w grafice komputerowej, a także w statystyce matematycznej.

Rozwiązanie zadania F 201. Ilość ciepła, jaką otrzymuje część pręta o przekroju kołowym znajdująca się w płomieniu, jest proporcjonalna do jej powierzchni bocznej, a więc do promienia pręta. Ciepło jest odprowadzane wzdłuż pręta. Straty ciepła są więc proporcjonalne do powierzchni przekroju poprzecznego pręta, a więc do kwadratu promienia. Dlatego równowaga cieplna grubego pręta ustala się w znacznie niższej temperaturze niż cienkiego drutu i cienki drut topi się w płomieniu, a gruby pręt nie.