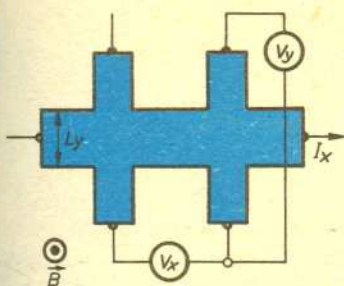


dr hab. Tomasz DIETL



Rys. 1

16 października 1985 r. Komitet Nagród Nobla Szwedzkiej Królewskiej Akademii Nauk poinformował o przyznaniu nagrody Nobla czterdziestodwuletniemu zachodnioniemieckiemu fizykowi Klausowi von Klitzingowi. Nagrodę przyznano za „odkrycie kwantowego efektu Halla”. Odkrycie nastąpiło w 1980 r., a więc sto lat po odkryciu przez amerykańskiego fizyka Edwina Herberta Halla „klasycznego” efektu Halla. W 1879 r. Hall stwierdził, że przyłożenie pola magnetycznego do materiału, przez który płynie prąd elektryczny, prowadzi do pojawienia się w przewodniku pola elektrycznego (napięcia) o kierunku prostopadłym do kierunku pola magnetycznego i prądu elektrycznego (rys. 1). Klasyczny efekt Halla stanowi od wielu lat podstawową metodę charakteryzacji przewodników, gdyż, jak się okazuje, opór Halla  $R_{xy}$  (stosunek napięcia  $U_y$  do prądu  $I_x$ ) pozwala na wyznaczenie gęstości nośników prądu elektrycznego.

Klaus von Klitzing wykazał doświadczalnie, że w pewnych warunkach opór Halla nie zależy od temperatury i indukcji pola magnetycznego, a jego odwrotność jest wielokrotnością  $e^2/h$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka, a  $e$  ładunkiem elektronu!

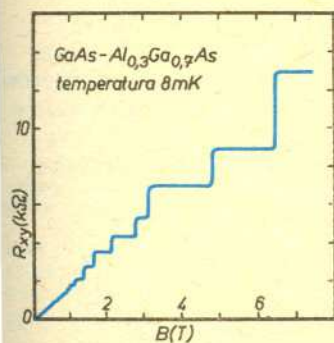
Przykładową zależność  $R_{xy}$  od pola magnetycznego  $B$  w heterostrukturze GaAs —  $Al_{0,3}Ga_{0,7}As$  przedstawia rysunek 2. W słabych polach magnetycznych  $R_{xy}$  rośnie liniowo z wartością  $B$ . W obszarze tym mamy do czynienia z klasycznym efektem Halla. Stosunek  $R_{xy}/B$  wyznacza koncentrację elektronów w próbce. W odpowiednio silnych polach magnetycznych i niskich temperaturach na wykresie pojawiają się charakterystyczne stopnie. W obszarach plateau (stopni)  $R_{xy} = h/e^2 i \approx 26k\Omega/i$ , gdzie  $i = 2, 3, 4, \dots$

Jakie mogą być praktyczne zastosowania efektu von Klitzinga? Po pierwsze, kwantowy efekt Halla może służyć do zbudowania „atomowego” wzorca jednostki oporu elektrycznego. Ponadto przyjmując, że prędkość światła jest znana z innych pomiarów,  $e^2/h$  wyznacza bezwymiarową stałą struktury subtelnej  $\alpha$ . Jak wiadomo, stała  $\alpha$  opisuje „siłę” oddziaływań elektromagnetycznych. Jej dokładna znajomość pozwala więc na precyzyjne porównanie przewidywań elektrodynamiki kwantowej i wyników doświadczalnych.

Kwantowy efekt Halla obserwuje się w tzw. układach dwuwymiarowych, których budowę omówimy w dalszej części artykułu. Od połowy lat siedemdziesiątych istniały przesłanki teoretyczne i dane doświadczalne sugerujące, że w układach dwuwymiarowych znajdujących się w ekstremalnie niskich temperaturach i silnych polach magnetycznych opór Halla może przyjmować wartości skwantowane w jednostkach  $h/e^2$ . Spodziewano się jednak, że podobnie jak w wielu analogicznych sytuacjach w fizyce ciała stałego, na wyniki doświadczalne będzie wpływało szereg niekontrolowanych efektów (kontakty, defekty struktury krystalicznej itp.). Ponadto istniejące teorie zostały zbudowane przy wielu założeniach upraszczających. W związku z tym nie oczekiwano zgodności teorii i wyników doświadczalnych lepszej od, powiedzmy, 10%. Wielkim osiągnięciem Klause von Klitzinga było podjęcie precyzyjnych pomiarów oporu Halla  $R_{xy}$  (w myśl zasady, że należy prowadzić pomiary tam, gdzie teoretycy nie oczekują niczego interesującego). Doświadczenia von Klitzinga wykazały, że  $R_{xy} = h/e^2 i$ , dla naturalnego  $i$ , z dokładnością do błędu eksperymentalnego, który w pierwszych pomiarach wynosił  $10^{-3}$  %. Późniejsze doświadczenia prowadzone z dokładnością  $2 \cdot 10^{-6}$  % potwierdziły wyniki von Klitzinga. Równocześnie rzesze teoretyków przystąpiły do teoretycznego uzasadnienia wyniku doświadczalnego oraz do znalezienia poprawek do wyrażenia  $R_{xy} = h/e^2 i$ . Jak dotychczas, nie ma powszechnie akceptowanego modelu teoretycznego. Kwantowy efekt Halla, a także odkryty później ułamkowy kwantowy efekt Halla ( $i = 1/3, 2/3, 1/5, 2/5, \dots$ ) stanowią poligon współczesnych teorii podejmujących próbę opisu zjawisk przenoszenia ładunku elektrycznego przez układ wielu oddziaływujących elektronów w obecności pola magnetycznego i losowo rozmieszczonych centrów rozpraszających (źródłem tych centrów są domieszki i defekty istniejące w każdym realnym materiale).

Heterostruktura — złącze zbudowane z dwóch różnych materiałów z reguły o różnej wartości przerwy energii wzbronionych.

$Al_{0,3}Ga_{0,7}As$  oznacza materiał półprzewodnikowy o strukturze krystalicznej takiej jak związek GaAs, w którym 30% atomów Ga zastąpionych jest przez atomy Al. Atomy galu i glinu wymieszane są w sieci w sposób przypadkowy.



Rys. 2





Odkrycie kwantowego efektu Halla jest także sukcesem tych fizyków i inżynierów, którzy pracują nad wytwarzaniem silnych pól magnetycznych i niskich temperatur oraz zajmują się produkcją wysokiej jakości materiałów półprzewodnikowych. Doświadczalne badanie zjawiska prowadzi się w stacjonarnych polach magnetycznych około  $5 \cdot 10^5$  razy silniejszych od pola ziemskiego i w temperaturach często zaledwie kilku tysięcznych części kelwina. Produkcja półprzewodników o wysokiej czystości wymagała opanowania m.in. techniki wytwarzania „próżni” o ciśnieniu resztkowym rzędu  $10^{-14}$  ciśnienia atmosferycznego.

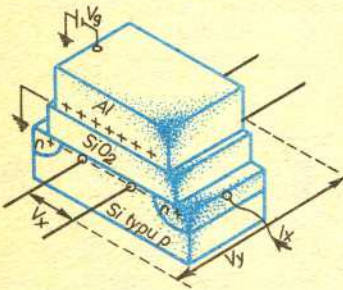
## Układy dwuwymiarowe

Pierwsze doświadczenia dotyczące kwantowego efektu Halla prowadzone były w tranzystorach polowych z izolowaną bramką typu MOS-FET. Tranzystory takie stanowią podstawowy element układów o dużej skali integracji. W typowym kalkulatorze lub zegarku elektronicznym jest ich około 5 tysięcy! Schemat budowy tranzystora przedstawia rysunek 3. Układ ten możemy traktować jako kondensator, którego jedną z okładek stanowi metal, a drugą wysokooporowy krzem typu p. Między okładkami znajduje się dielektryk  $\text{SiO}_2$ , który wytwarza się przez utlenienie powierzchni krzemu. Przyłożenie napięcia  $V_g$  do kondensatora prowadzi do pojawienia się przy powierzchni półprzewodnika ładunku  $Q = C \cdot V_g$ , gdzie  $C$  jest pojemnością kondensatora. Elektrony przypowierzchniowe mogą się poruszać swobodnie jedynie w płaszczyźnie międzypowierzchniowej Si-SiO<sub>2</sub> i w tym sensie stanowią układ dwuwymiarowy (ruch w kierunku prostopadłym do międzypowierzchni uniemożliwia napięcie  $V_g$ ). Zależność energii elektronu od pędu ma więc w układach dwuwymiarowych postać

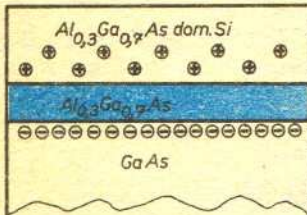
$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m}.$$

W badaniach kwantowego efektu Halla interesuje nas iloraz napięcia  $U_y$  do prądu  $I_x$  jako funkcja pola magnetycznego prostopadłego do międzypowierzchni (rys. 3).

Drugi układ półprzewodnikowy, który omówimy, ma jak dotąd mniejsze zastosowania praktyczne, ale wydaje się, że w przyszłości będzie podstawowym elementem urządzeń telekomunikacji światłowodowej oraz szybkich komputerów. Typowa struktura GaAs—AlGaAs, bo o niej mowa, składa się z cienkich warstw czystego GaAs i  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$  oraz domieszkowanego krzemem  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$  nałożonych metodą wiązek molekularnych na podłoże z półizolacyjnego GaAs (urządzenie do laboratoryjnej produkcji takich struktur, zwanych heterostrukturami, kosztuje około miliona dolarów). Ponieważ pasmo przewodnictwa GaAs leży niżej niż w  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ , elektrony z domieszek (donorów) krzemowych w  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$  domieszkowanego Si przechodzą do GaAs (rys. 4). I tutaj elektrony tworzą układ dwuwymiarowy, gdyż przyciąganie elektrostatyczne przez dodatnie donory uniemożliwia ruch w kierunku prostopadłym do międzypowierzchni GaAs-AlGaAs.



Rys. 3



Rys. 4

Obszar w pobliżu granicy między dwoma różnymi materiałami nazywamy międzypowierzchnią. W wielu przypadkach w pobliżu takiej granicy własności obu materiałów ulegają zmianom ze względu na możliwość występowania defektów struktury krystalicznej.



## O fizyce klasycznego i kwantowego efektu Halla

Przypuśćmy, że przez przewodnik o jednorodnym przekroju i długości  $L_x$  płynie prąd elektryczny  $I_x$  (rys. 1 i 3). Oczywiście  $I_x$  jest tym większe, im większa jest średnia prędkość elektronów  $v$  oraz ich liczba  $N$ ,  $I_x = evN/L_x$  (Czytelnik może podjąć próbę wyprowadzenia tego wzoru samodzielnie). Przyłożmy teraz pole magnetyczne  $B$  o kierunku prostopadłym do powierzchni naszej próbki. Na elektrony zaczyna działać siła Lorentza  $F = eE + e(v \times B)$ , gdzie  $E$  jest polem elektrycznym w przewodniku. Siła Lorentza powoduje przepływ ładunku w kierunku prostopadłym do kierunku pola magnetycznego i prądu elektrycznego (zjawisko to jest wykorzystywane w niektórych oscyloskopach do odchylenia wiązki elektronów). Prowadzi to do gromadzenia się ładunku na ściankach próbki. Ładunki te wytwarzają pole elektryczne  $E_y$ , które zaczyna kompensować składową magnetyczną siły Lorentza i osłabiać przepływ nośników w kierunku  $y$ .





Warunki stacjonarne ustalą się, gdy  $F_y = 0$ , a więc gdy  $E_y = -vB$ . Stąd pamiętając, że  $E_y = -V_y/L_y$ , otrzymujemy

$$(1) \quad R_{xy} = \frac{V_y}{I_x} = \frac{BL_x L_y}{eN}$$

Równanie to stanowi istotę klasycznego efektu Halla. Jest ono spełnione zarówno w przypadku, gdy elektrony znajdują się w całej objętości próbki, jak również gdy występują w cienkiej ( $d \approx 10^{-8} \text{m}$ ) warstwie przy międzypowierzchni.

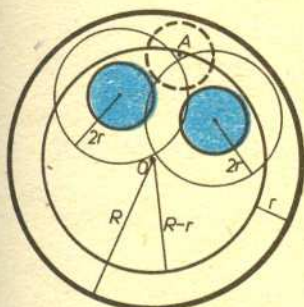
Jak powyższy klasyczny obraz modyfikuje mechanika kwantowa? Lew Landau wykazał w 1930 r., że pole magnetyczne „kwantuje” ruch elektronów w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku pola magnetycznego. W przypadku dwuwymiarowym oznacza to, że energia elektronów może przyjmować tylko dyskretne wartości  $E_i$  (w przypadku trójwymiarowym  $E = E_i + p_z^2/2m$ ). Stwierdził on także, że odległość między poziomami  $E_i$  (nazywamy je obecnie poziomami Landaua) jest proporcjonalna do indukcji pola magnetycznego. Udowodnił wreszcie, że na każdym poziomie Landaua może znajdować się co najwyżej  $eBL_x L_y/h$  elektronów. W odpowiednio niskiej temperaturze elektrony zapełniają tylko najniższe poziomy. Liczbę zapełnionych poziomów określa wtedy wzór  $\nu = hN/eBL_x L_y$ . W polach magnetycznych, w których zapełnionych jest łącznie  $i$  poziomów, a pozostałe są puste, otrzymujemy

$$(2) \quad R_{xy} = \frac{BL_x L_y}{eN} = \frac{h}{e^2 i}$$

Wydaje się więc, że nasz prosty model łącznie tłumaczy kwantowy efekt Halla! Gdzie więc te kłopoty fizyków-teoretyków, o których wspominaliśmy? Chwila zastanowienia wystarczy jednak, by stwierdzić, że nasze rozumowanie przewiduje „skwantowane” wartości  $R_{xy}$  tylko dla dyskretnej wartości pól magnetycznych  $B_i = hN/ieL_x L_y$ . W doświadczeniu natomiast obserwuje się spełnienie równania (2) w szerokim zakresie pól magnetycznych (rys. 2). Większość fizyków uważa, że występowanie stopni związane jest z defektami (domieszkami), które istnieją w każdej próbce. Jeśli jednak defekty mają znaczenie, to czemu równanie (2) wyprowadzone przy ich zaniedbaniu jest spełnione? Intuicyjnie możemy to tłumaczyć tym, że obszary geometryczne próbki, w których istnieje silny potencjał elektrostatyczny wytworzony przez defekt, są „omijane” przez elektrony. Prowadzi to do zmniejszenia efektywnej powierzchni próbki. Nie wpływa to jednak na równanie (2), gdyż nie zawiera ono żadnych wymiarów geometrycznych.



Rozwiązanie zadania M 441. Suma pól  $n$  kół o promieniu  $r$  jest mniejsza od pola dużego koła. Stąd  $nr^2 < R^2$ , czyli  $\sqrt{n} < \frac{R}{r}$ . Z drugiej strony, rozpatrzmy koła o promieniu  $2r$  i o tych samych środkach.



Muszą one pokrywać pole większe niż pole koła o promieniu  $R - r$  i środka  $O$  — inaczej dałoby się umieścić nowe koło o promieniu  $r$ . Zatem  $n \cdot 4r^2 > (R - r)^2$ , czyli  $\sqrt{n} > \left(\frac{R-r}{2r}\right)$ .

W kole da się umieścić jeszcze jedno koło o promieniu  $r$  i środka  $A$ .

## Czytelnicy proponują

Pan Kazimierz Łuczak z Beldowa nadesłał nam szereg ciekawych wzorów z zakresu teorii liczb. Oto jedna z serii:

$$\begin{aligned} 7^4 + 8^4 + 64 \cdot 1^3 &= 9^4, \\ 22^4 + 23^4 + 24^4 + 64(1+2)^3 &= 25^4 + 26^4, \\ 45^4 + \dots + 48^4 + 64(1+\dots+3)^3 &= 49^4 + \dots + 51^4, \\ 76^4 + \dots + 80^4 + 64(1+\dots+4)^3 &= 81^4 + \dots + 84^4 \\ \text{itd.} \end{aligned}$$

Gdyby ktoś chciał udowodnić te wzory, to proponujemy najpierw wykazać (indukcyjnie), że

$$\sum_{k=1}^n k^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$

a następnie, za pomocą udowodnionego wzoru, wykazać, że

$$\sum_{k=4n^2+3n}^{4n^2+4n} k^4 + (2n(n+1))^3 = \sum_{k=4n^2+4n+1}^{4n^2+5n} k^4,$$

skąd bezpośrednio można już wypisać dowolnie wiele równości podanego typu.