Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1986.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1986

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

127. Czy istnieje w $\mathbb{R}^3$ zbiór mający dokładnie 6 osi symetrii?

128. Niech $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \{1, \dots, p\}\}$; $p \geq 3$ to ustalona liczba pierwsza. Dowieść, że w zbiorze K istnieje p punktów, wśród których nie ma trzech współliniowych.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 123 /WT=1,46/ i 124 /WT=2,75/ z numeru 1/1986

Andrzej Bonk	- Chełmża	47,41pkt
Marek Gałecki	- Milanówek	45,90pkt
Jacek Mańdziuk	- Lublin	44,39pkt
Piotr Jędrzejewicz	- Toruń	43,96pkt
Marian Roman	- Ełk	43,09pkt
Andrzej Sudoł	- Nowy Sącz	42,56pkt
Kazimierz Serbin	- Sanok	42,54pkt
Dariusz Sowizdrzał	- Szczecin	41,36pkt

Pan Gałecki jest drugim uczestnikiem ligi, który wykonał pięć pełnych okrążeń. Panowie: Bonk i Mańdziuk - to nowe twarze w Klubie 44.

127. Niech L będzie pewną ustaloną osią symetrii rozpatrywanego zbioru. Jeśli prosta L' jest inną osią symetrii i albo nie przecina prostej L, albo przecina, ale nie pod kątem prostym, to prosta L'' symetryczna do L' względem prostej L także jest osią symetrii. Jeśli natomiast pewna oś symetrii L' przecina L prostopadle, to inną osią symetrii jest prosta L'' przechodząca przez punkt przecięcia prostych L i L' i prostopadła do nich. W ten sposób wszystkie osie symetrii różne od L zostały pogrupowane w pary L', L''. Jeśli więc dany zbiór ma dodatnią i skończoną liczbę osi symetrii, to liczba ta jest nieparzysta — nie może zatem być równa 6.

128. Warunki zadania spełnia na przykład p punktów postaci $(x, r(x))$, gdzie $x = 1, \dots, p$, a $r(x)$ jest resztą z dzielenia x^2 przez p (dla $x < p$) oraz $r(p) = p$. Załóżmy, że trzy punkty tej postaci (x_i, y_i) są współliniowe. Wówczas $x_i, y_i \in \{1, \dots, p\}$, $y_i \equiv x_i^2 \pmod p$ $(i = 1, 2, 3)$, $(y_2-y_1)/(x_2-x_1) = (y_3-y_1)/(x_3-x_1)$. Stąd

$$(x_2^2-x_1^2)(x_3-x_1) \equiv (x_3^2-x_1^2)(x_2-x_1) \pmod p,$$

czyli

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \equiv 0 \pmod p.$$

To jednak jest niemożliwe, bo liczba pierwsza p musiałaby dzielić któryś z czynników lewej strony, a wartość bezwzględna każdego z tych czynników zawiera się ostro między 0 a p.

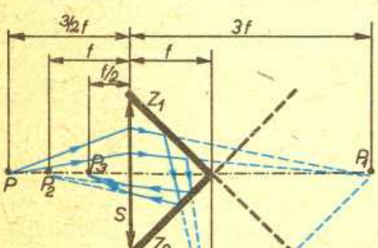
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1986

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Przypominamy treść zadań:

25. W układzie optycznym dwa zwierciadła płaskie Z_1 i Z_2, prostopadłe do siebie, tworzą dwie ściany graniastosłupa o podstawie trójkąta równoramiennego. W trzeciej ścianie (nieprzezroczystej) tego graniastosłupa umieszczono soczewkę skupiającą S o ogniskowej f w taki sposób, że jej oś optyczna przecina prostopadle krawędź styku zwierciadeł, a jedno z ognisk soczewki leży na tej krawędzi. Znaleźć położenie i powiększenie wytworzonego przez ten układ obrazu małego przedmiotu P, znajdującego się w pobliżu osi optycznej soczewki w odległości $1{,}5f$ od niej.

26. Czy pocisk wystrzelony z powierzchni Księżyca z prędkością $-v$, gdzie v jest chwilową prędkością Księżyca w jego ruchu wokół Ziemi: (a) spadnie na Księżyc, (b) spadnie na Ziemię, czy też (c) wejdzie na orbitę dookoła któregoś z tych ciał (którego)? Odpowiedź uzasadnić. Niezbędne dane należy wziąć z tablic.



25. Rysunek przedstawia bieg promieni w płaszczyźnie prostopadłej do zwierciadeł i zawierającej oś optyczną soczewki. Położenia obrazów wyznaczamy przy założeniu, że soczewka jest cienka. Jeśli by nie było zwierciadeł, obraz przedmiotu P powstałby w punkcie P_1, w odległości $3f$ od soczewki. Powiększenie tego obrazu w stosunku do przedmiotu wynosiłoby $3f/1{,}5f = 2$. Na skutek odbić od zwierciadeł (niezależnie od kolejności tych odbić) promienie tworzące obraz biegną w kierunku punktu P_2. W punkcie tym występuje obraz urojony dla soczewki, powiększony dwukrotnie względem przedmiotu. Jak wynika z rozważań geometrycznych, punkt P_2 znajduje się w odległości f od soczewki. Po przejściu promieni przez soczewkę ostateczny obraz (rzeczywisty) powstaje w punkcie P_3. Odległość d tego punktu od soczewki, wyznaczona z równania soczewki $\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{f}$, wynosi $0{,}5f$. Obraz P_3 jest dwukrotnie zmniejszony w stosunku do obrazu P_2, jest więc wielkości przedmiotu.

26. Obliczmy najpierw wzajemny stosunek działających na ciało znajdujące się na powierzchni Księżyca sił przyciągania go przez Księżyc i przez Ziemię. Wartości tych sił wynoszą odpowiednio

$$\frac{\gamma M_K m}{R^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{\gamma M_Z m}{r^2},$$

gdzie: $\gamma = 6{,}7\cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$ — stała grawitacji, $M_K = 7{,}3\cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ — masa Księżyca, $M_Z = 6{,}0\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ — masa Ziemi, $R = 1{,}7\cdot 10^6\,\mathrm{m}$ — promień Księżyca, $r = 3{,}8\cdot 10^8\,\mathrm{m}$ — średnia odległość Ziemia — Księżyc, m — masa ciała.

Stosunek wartości obu tych sił jest równy $\frac{M_K r^2}{M_Z R^2} \approx 600$. Siła przyciągania ziemskiego jest więc na tyle mała w porównaniu z siłą przyciągania Księżyca, że będzie ona tylko nieznacznie modyfikowała ruch pocisku w polu grawitacyjnym Księżyca. Aby stwierdzić, czy pocisk spadnie z powrotem na Księżyc, czy też ma szanse od niego się oderwać, porównamy jego prędkość z pierwszą i drugą księżycową prędkością kosmiczną. Prędkość pocisku, równa prędkości Księżyca w ruchu wokół Ziemi, wynosi $v = \frac{2\pi r}{T} = 1{,}0$ km/s ($T = 2{,}4 \cdot 10^6$s — miesiąc gwiazdowy). Księżycowe prędkości kosmiczne, równe odpowiednio $v_I = \sqrt{\frac{\gamma M_K}{R}} = 1{,}7$ km/s oraz $v_{II} = \sqrt{2} v_I = 2{,}4$ km/s, są — jak widać — znacznie większe od prędkości pocisku. Stąd wnioskujemy, że pocisk spadnie na powierzchnię Księżyca. Obliczając jeszcze maksymalną odległość, na jaką pocisk może oddalić się od Księżyca (około $5R$) stwierdzamy, że na całym torze pocisku udział przyciągania ziemskiego (poniżej 1/20) jest zbyt mały, aby wpłynąć na zmianę tego rozwiązania.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 21 /WT=1,96/ i 22 /WT=3,81/
z numeru 1/1986

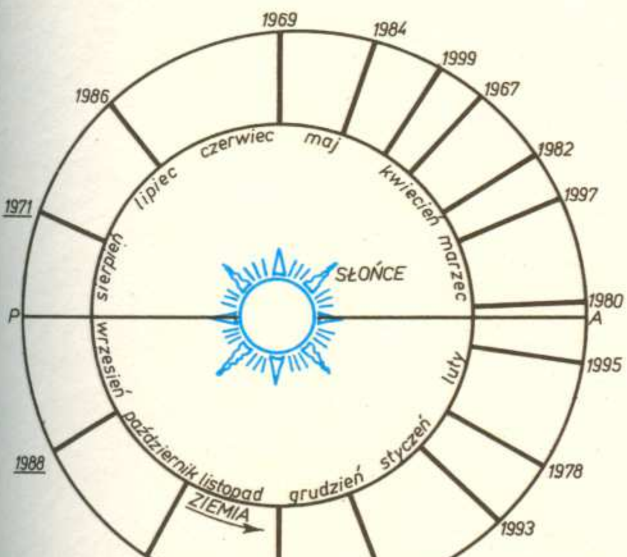
Piotr Baża	- Toruń	43,19pkt
Tomasz Rawlik	- Gliwice	28,64pkt
Aleksander Surma	- Myszków	18,94pkt
Dzierżysław Lipniacki-Lublin		18,82pkt
Mirosław Semla	- Opole	15,20pkt

Patrz w niebo

Mars nie jest wprawdzie planetą najbliższą Ziemi, ale jest planetą, która w momentach najdogodniejszych do przeprowadzania obserwacji powierzchni zbliża się do Ziemi na najmniejszą odległość. Jak w przypadku wszystkich planet górnych najdogodniejsze warunki do dokonywania obserwacji wypadają w czasie opozycji. Jednak nie wszystkie opozycje są równie dobre.

Orbita Marsa jest dość silnie spłaszczona (mimośród 0,093), w związku z czym nie wszędzie jest jednakowo odległa od orbity Ziemi. Obie planety poruszają się niemal w jednej płaszczyźnie, a więc odległość między nimi można mierzyć w płaszczyźnie ich ruchu. Ziemia dokonuje jednego obiegu dookoła Słońca w ciągu 365,26 dób, Mars — w ciągu 686,96 dób ziemskich, a więc okres synodyczny, tj. odstęp między dwiema jednakowymi konfiguracjami tych planet jest równy 779,94 doby.

Związek między okresem synodycznym (S) planety górnej, jej okresem obiegu wokół Słońca (T) i rokiem gwiazdowym (E) jest następujący: $1/S = 1/E - 1/T$.



Opozycje Marsa do 1999 roku. Podkreślono daty wielkich opozycji. P — peryhelium orbity Marsa, A — aphelium orbity Marsa.

Ponieważ okresy obiegu Ziemi i Marsa nie są współmierne, opozycje wypadają w bardzo różnych położeniach Marsa na orbicie. Te, w czasie których Mars znajduje się w peryhelium, są najkorzystniejsze do dokonywania obserwacji. Opozycje takie wypadają co 15 lub 17 lat, zawsze w sierpniu lub we wrześniu i zwane są „wielkimi opozycjami Marsa". Ma on wtedy szczególnie duże rozmiary kątowe — średnica jego tarczy sięga 25″, a jasnością dochodzącą do —2,8 mag ustępuje jednej tylko planecie — Wenus. Dla porównania: w momencie największego oddalenia od Ziemi Mars jest niewiele jaśniejszy od Gwiazdy Polarnej, a średnica kątowa jego tarczy jest równa zaledwie 3,″5.

W czasie wielkich opozycji Mars zbliża się do Ziemi na odległość mniejszą niż 60 mln km. Wprawdzie jeszcze bardziej zbliża się do Ziemi Wenus (40 mln km), ale Wenus jako planeta dolna jest wtedy niewidoczna (złączenie dolne.) Gdy sierp Wenus powiększy się na tyle, by można dokonywać obserwacji powierzchni, planeta jest już odległa od Ziemi przynajmniej o 100 mln km. Obserwacje dokonywane w czasie wielkich opozycji Marsa przyczyniły się istotnie do sporządzenia szczegółowych map jego powierzchni, a także doprowadziły do odkrycia jego księżyców (Asaph Hall 1877 r.). W bieżącym stuleciu wielkie opozycje wypadały w latach: 1909, 1924, 1939, 1956, 1971. Najbliższa będzie 18 września 1988 r.

Przypadająca 10 lipca bieżącego roku opozycja charakteryzuje się warunkami bardzo zbliżonymi do wielkiej. W okolicy tej daty Mars zbliża się do Ziemi na odległość około 60 mln km, średnica jego tarczy wynosi 23″, a jasność osiąga −2,4 mag (dla porównania: Mars na początku 1986 roku był obiektem +1,4 wielkości gwiazdowej). W czasie opozycji Mars znajduje się w gwiazdozbiorze Strzelca. Obecne jego położenie można łatwo wyznaczyć na podstawie fragmentu mapy nieba z okładki *Delty* 8/1985. W okolicy daty opozycji Mars pojawia się na niebie po zachodzie Słońca i jest widoczny przez całą noc, pozostając jednak bardzo nisko nad południowym horyzontem.

2 sierpnia Mars osiągnie maksymalną południową deklinację (−28°,7). Od 1907 roku deklinacja jego po raz pierwszy przyjmuje tak małą wartość. W momencie górowania, w szerokości geograficznej Warszawy znajdzie się niecałe 10° nad horyzontem.

Oddalając się i słabnąc Mars pozostanie gwiazdą wieczorną do końca 1986 roku.

mgr Joanna UDALSKA